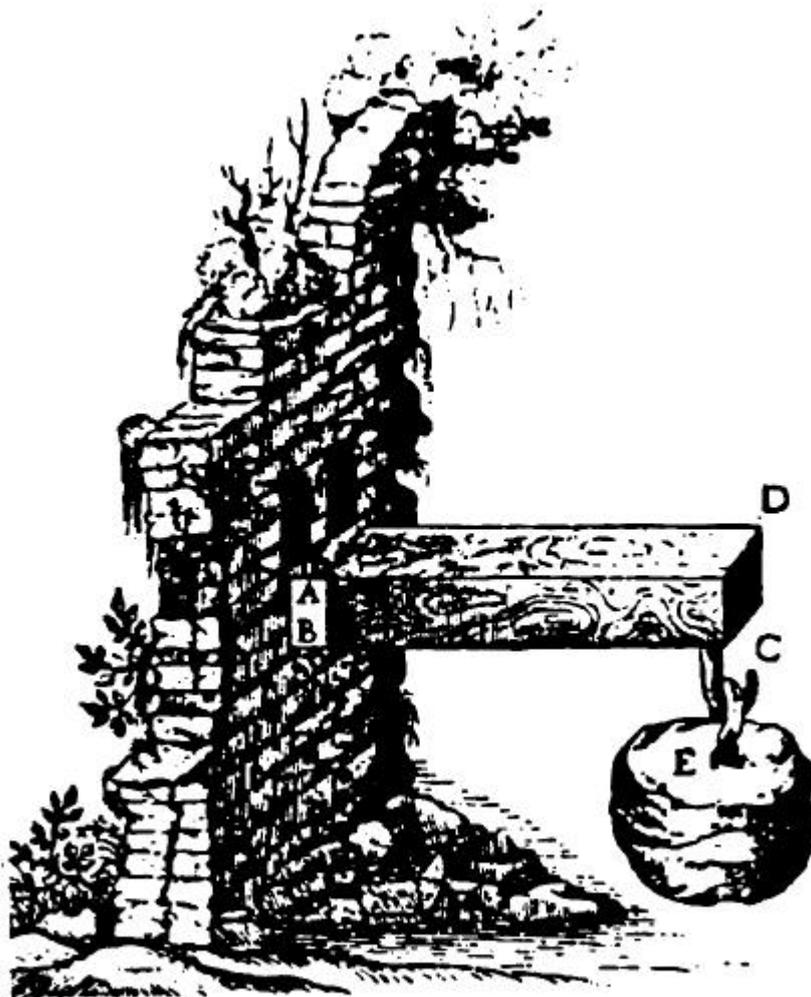


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



FLEXION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni matematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

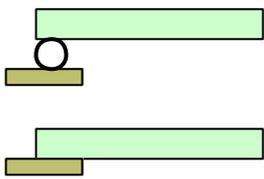
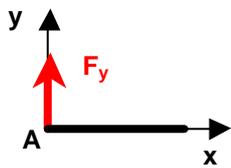
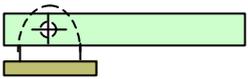
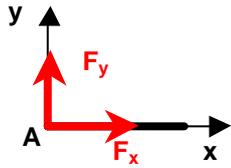
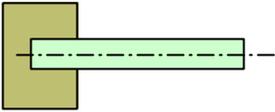
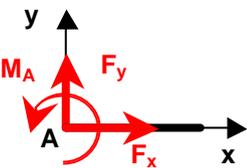
| | |
|---|-----------|
| 1. SCHEMATISATION DES LIAISONS | 4 |
| 2. EFFORTS INTERIEURS | 6 |
| 3. DIAGRAMMES | 6 |
| 3.1 ESSAI DE FLEXION | 7 |
| 3.2 CORRESPONDANCE ENTRE LES DIAGRAMMES | 8 |
| 3.3 POUTRE ENCASTREE | 9 |
| 4. CHARGES REPARTIES | 10 |
| 4.1 CHARGE REPARTIE UNIFORME | 10 |
| 4.2 CHARGE REPARTIE LINEAIREMENT VARIABLE | 11 |
| 5. CONTRAINTES DE FLEXION | 12 |
| 5.1 CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION | 12 |
| 5.2 CALCUL DES CONSTRUCTIONS | 13 |
| 5.3 CONCENTRATION DE CONTRAINTES EN FLEXION | 15 |
| 5.4 CONTRAINTES DE CISAILLEMENT EN FLEXION | 17 |
| 5.4.1 <i>Mise en évidence</i> | 17 |
| 5.4.2 <i>Cas des poutres rectangulaires</i> | 17 |
| 5.4.3 <i>Cas des poutres circulaires</i> | 18 |
| 5.4.4 <i>Exemple</i> | 18 |
| 6. DEFORMATIONS EN FLEXION | 19 |
| 6.1 NOTION DE DEFORMEE | 19 |
| 6.2 METHODE PAR INTEGRATION | 20 |
| 6.2.1 <i>Principe</i> | 20 |
| 6.2.2 <i>Exemple</i> | 20 |



RESISTANCE DES MATERIAUX

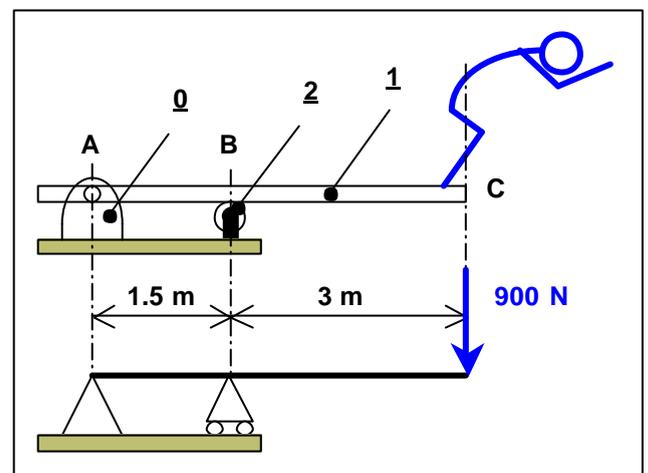
1. Schématisation des liaisons

Dans le cas des problèmes plans (systèmes de forces coplanaires), la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple (ponctuel ou plan sans frottement), articulation (pivot) et encastrement.

| TYPE | EXEMPLES | SCHEMATISATION | ACTIONS EXERCEES |
|--------------|---|---|---|
| Appui simple |  |  |  |
| Pivot |  |  |  |
| Encastrement |  |  |  |

Exemple : planche de plongeur

La poutre **1** est schématisée par sa ligne moyenne AC. La liaison en A (pivot **1/0**) est une articulation et la liaison en B entre **1** et **2** se ramène à un appui simple. \vec{P} (900 N) schématise l'action du nageur.



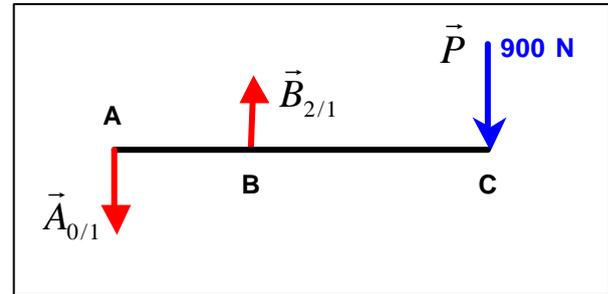
RESISTANCE DES MATERIAUX

A l'équilibre (Principe Fondamental de la Statique), si on isole **1** :

$$\begin{cases} \vec{A}_{0/1} + \vec{B}_{2/1} + \vec{P} = \vec{0} \\ M_A(\vec{A}_{0/1}) + M_A(\vec{B}_{2/1}) + M_A(\vec{P}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_{0/1} + B_{2/1} - 900 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{0/1} \times 0 + B_{2/1} \times 1.5 - 900 \times 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

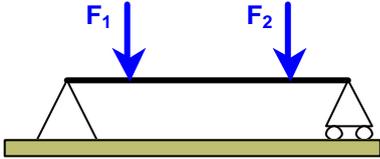
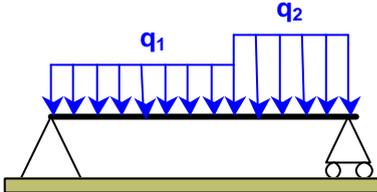
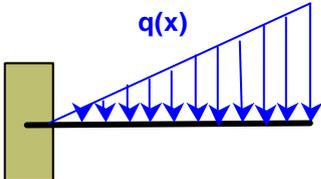


L'équation (2) donne $B_{2/1} = 2700 \text{ N}$ (et orientée effectivement comme sur le schéma, vers le haut).

En injectant $B_{2/1} = 2700 \text{ N}$ dans (1), on trouve $A_{0/1} = 1800 \text{ N}$ (orientée effectivement comme sur le schéma, vers le bas).

Remarque 1 : dans la plupart des schématisations, la poutre est modélisée par sa ligne moyenne.

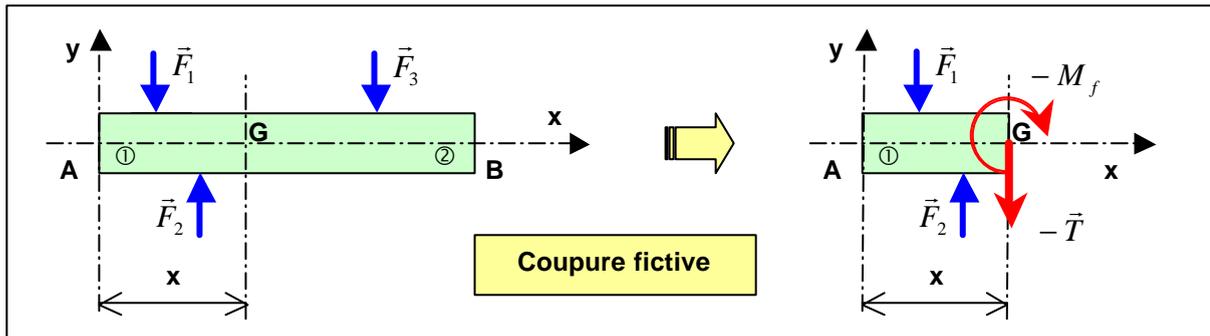
Remarque 2 : les poutres sont identifiées à partir des charges extérieures appliquées :

| | |
|--|--|
| <p>Poutre simple sur deux appuis avec charges concentrées F_1 et F_2</p> |  |
| <p>Poutre simple sur deux appuis avec charges réparties q_1 et q_2</p> |  |
| <p>Poutre encastree avec charge répartie $q(x)$ linéairement croissante</p> |  |

RESISTANCE DES MATERIAUX

2. Efforts intérieurs

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M_f (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).



Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue une coupure fictive à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon 1, on obtient l'effort tranchant T et le moment fléchissant M_f (on obtient en fait respectivement $-T$ et $-M_f$, voir Cours « Tenseur de Cohésion »).

\vec{T} = somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées à gauche de la section fictive = $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

M_f = moment résultant en G de toutes les actions extérieures situées à gauche de la section fictive = $M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)$

Remarque : le cas $M_f \neq 0$ avec $T = 0$ correspond à de la flexion pure, alors que le cas $M_f \neq 0$ avec $T \neq 0$ correspond à de la flexion simple.

3. Diagrammes

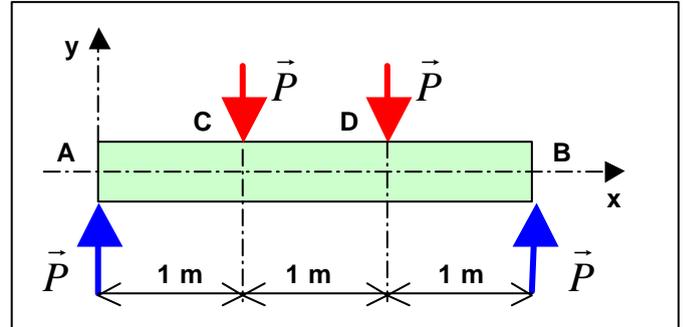
Les valeurs de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de t et M_f (graphes mathématiques de type (x, y)) permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.1 Essai de flexion

Un dispositif de mise en charge exerce une poussée de 20 000 N qui se répartit en C et D, alors que le bâti de la machine supporte la poutre en A et B.

La symétrie du chargement et des appuis entraîne $A = B = C = D = P = 10\,000\text{ N}$, le poids de la poutre étant négligé.



❖ **Etude du tronçon AC** : section fictive d'abscisse $0 \leq x \leq 1\text{ m}$

Une seule force à gauche de la section fictive : \vec{P} au point A
 Effort tranchant $T_{AC} = P = 10\,000\text{ N}$ pour tout $0 \leq x \leq 1\text{ m}$
 Moment fléchissant $M_{fAC} = -P \times x = -10\,000\text{ x Nm}$

❖ **Etude du tronçon CD** : section fictive d'abscisse $1 \leq x \leq 2\text{ m}$

Deux forces à gauche de la section fictive : \vec{P} au point A, et $-\vec{P}$ au point C
 Effort tranchant $T_{CD} = P - P = 0\text{ N}$ pour tout $1 \leq x \leq 2\text{ m}$
 Moment fléchissant $M_{fCD} = -P \times x + P \times (x - 1) = -P = -10\,000\text{ Nm}$

Remarque : sur ce tronçon $M_f \neq 0$ et $T = 0$, on est dans un cas de flexion pure.

❖ **Etude du tronçon DB** : section fictive d'abscisse $2 \leq x \leq 3\text{ m}$

Trois forces à gauche de la section fictive : \vec{P} en A, et $-\vec{P}$ aux points C et D
 Effort tranchant $T_{DB} = P - P - P = -10\,000\text{ N}$ pour tout $2 \leq x \leq 3\text{ m}$
 Moment fléchissant $M_{fDB} = -P \times x + P \times (x - 1) + P \times (x - 2) = -P = 10\,000\text{ (x - 3) Nm}$

RESISTANCE DES MATERIAUX

❖ **Diagrammes** : rassemblons les trois résultats précédents sur un même graphe :

Diagramme des efforts tranchants :

$$T_{AC} = 10000 \text{ N} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$T_{CD} = 0 \text{ N} \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

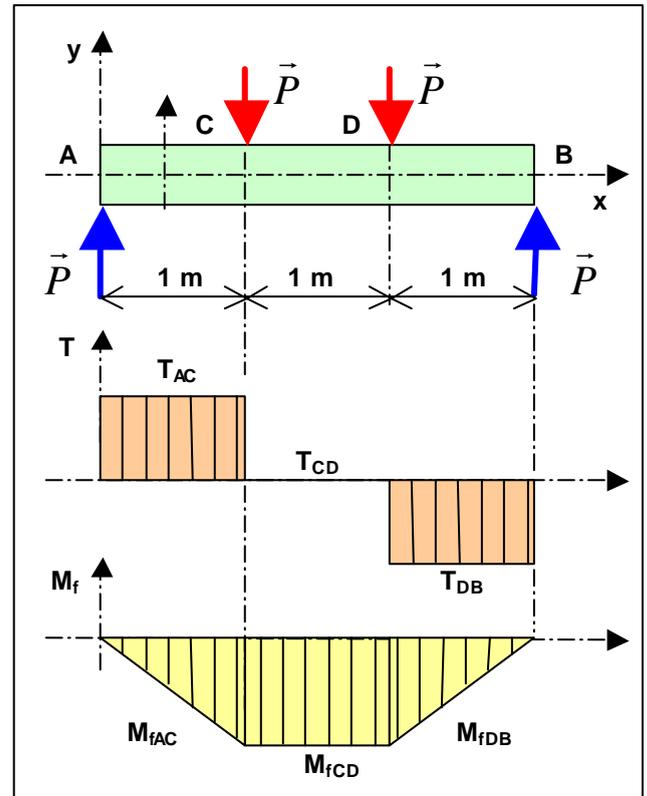
$$T_{DB} = -10000 \text{ N} \text{ pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Diagramme des moments fléchissants :

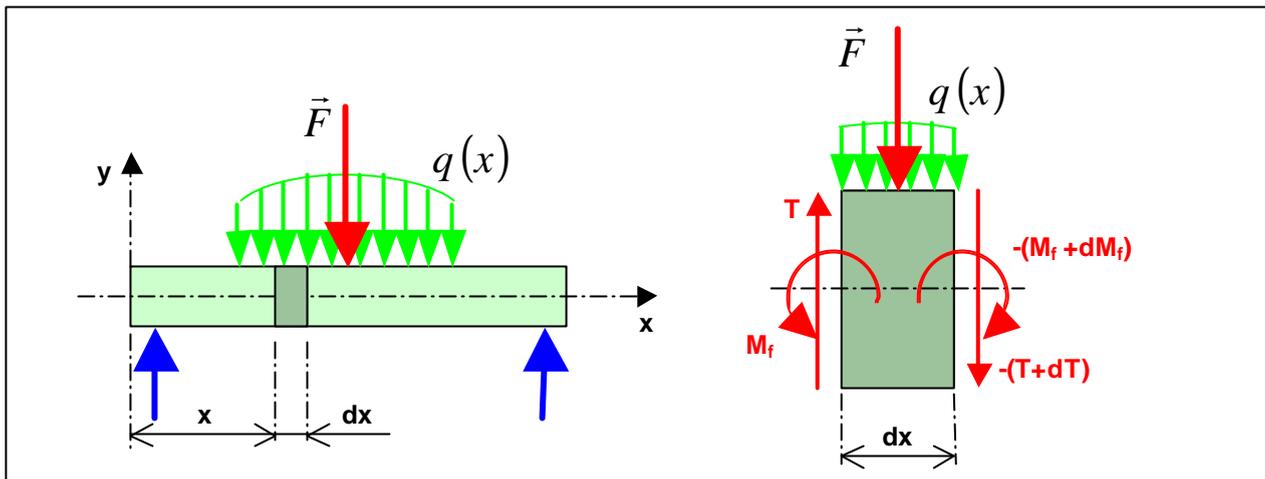
$$M_{fAC} = -10000 x \text{ Nm} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$M_{fCD} = -10000 \text{ Nm} \text{ pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$M_{fDB} = 10000 (x - 3) \text{ Nm} \text{ pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$



3.2 Correspondance entre les diagrammes



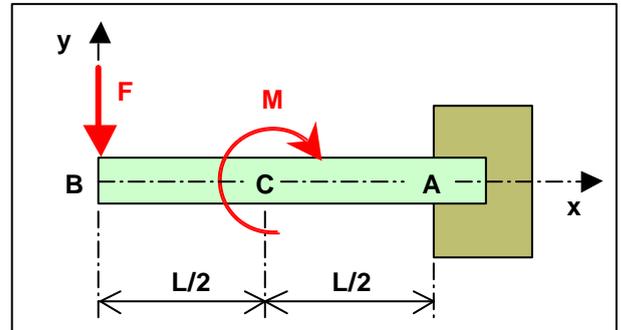
L'étude de l'équilibre du tronçon de largeur dx appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, donne :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \text{ et } \frac{dM_f}{dx} = -T$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.3 Poutre encastree

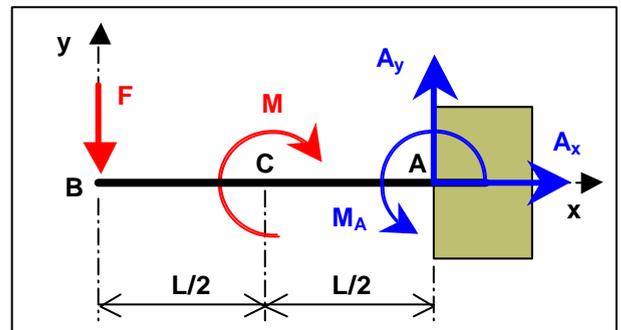
On considère une poutre encastree de longueur $L = 2$ m soumise à un effort concentré $F = 1\,000$ N (vers le bas) au point B et à un couple pur $M = 1\,000$ Nm (sens anti-trigonometrique) autour du point C.



❖ Actions exercées par l'encastrement sur la poutre : le **Principe Fondamental de la Statique** donne :

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{A}) - M + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - 1000 = 0 \\ 1000 \times 2 - M + M_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 1000 \text{ N} \\ M_A = -1000 \text{ Nm} \end{cases}$$



❖ Etude du tronçon BC : $0 \leq x \leq 1$ m

Effort tranchant :

$$T_{BC} = -F = -1000 \text{ N}$$

Moment fléchissant :

$$M_{fBC} = F \times x = 1000 x \text{ Nm}$$

❖ Etude du tronçon CA : $1 \leq x \leq 2$ m

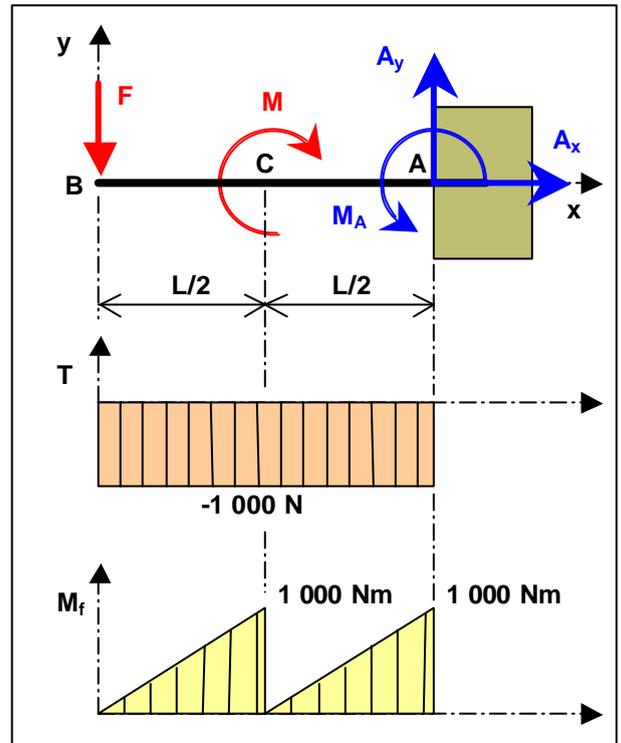
Effort tranchant :

$$T_{CA} = -F = -1000 \text{ N}$$

Moment fléchissant :

$$M_{fCA} = F \times x - M = 1000(x - 1) \text{ Nm}$$

❖ Diagrammes : ci-contre.



RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Charges réparties

Les charges réparties ont pour origine les actions de pesanteur et des actions de contact diverses (vent, neige, pression d'un fluide...). Elles peuvent être uniformes ou variables.

4.1 Charge répartie uniforme

Traisons ce cas à partir d'un exemple. Considérons une poutre (longueur $L = 4$ m) réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40 daN par mètre ($\vec{q} = -400 \vec{y}$ ou $q = 400 \text{ N.m}^{-1}$).

❖ **Actions aux appuis en A et B :**

Le Principe Fondamental de la Statique donne : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{q} = \vec{0}$

En projection sur y : $A_y + B_y - qL = 0$ avec $A_y = B_y$ du fait de la symétrie.

$$\text{D'où } A_y = B_y = \frac{qL}{2} = \frac{400 \times 4}{2} = 800 \text{ N}$$

❖ **Effort tranchant :**

$$T_{AB} = A_y - qx = 400(2 - x)$$

❖ **Moment fléchissant :**

$$M_{fAB} = -A_y \times x + qx \times \frac{x}{2} = 200x(x - 4)$$

❖ **Diagrammes :** ci-contre.

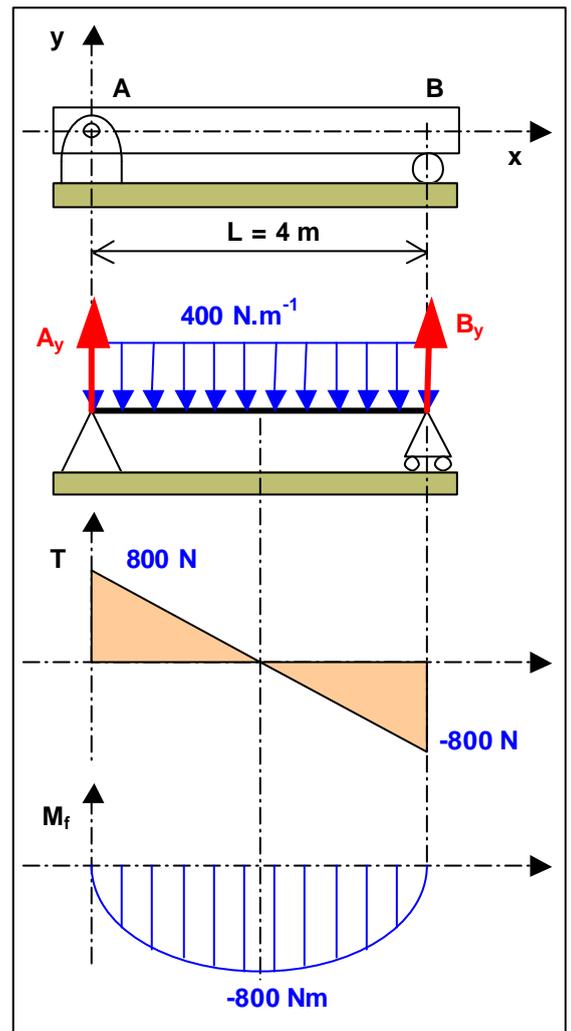
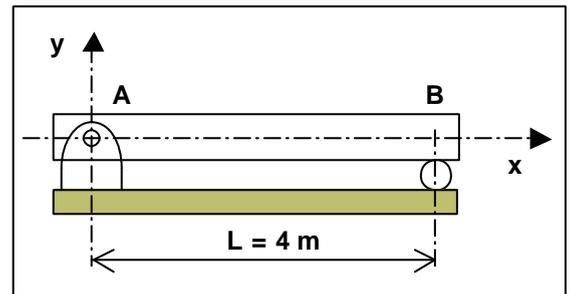
❖ **Remarque :** calcul de l'extrémum

$$\frac{dM_{fAB}}{dx} = \frac{d[200x(x - 4)]}{dx} = 400(x - 2)$$

s'annule pour $400(x - 2) = 0$ soit $x = 2$

et la valeur maxi du moment fléchissant est alors (pour $x = 2$) :

$$M_{fABMaxi} = 200 \times 2(2 - 4) = -800 \text{ Nm}$$



RESISTANCE DES MATERIAUX

4.2 Charge répartie linéairement variable

Nous allons également traiter ce cas à partir d'un exemple. Prenons le cas d'une poutre (longueur $L = 3$ m) encastree en A, supportant la charge linéairement croissante $q(x)$ de la figure ci-contre.

❖ Charge répartie :
$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_A}{L}$$

d'où
$$q(x) = \frac{q_A}{L} x = \frac{1500}{3} x = 500 x \text{ Nm}$$

❖ Action à l'encastrement : Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{R}) + M_A(\vec{A}) = 0 \end{cases}$$

où \vec{R} est la résultante de la charge répartie $q(x)$ sur toute la longueur L :

$$R = \frac{1500 \times 3}{2} = 2250 \text{ N} \text{ (aire du triangle)}$$

Cette résultante s'applique au « centre de gravité du triangle », c'est-à-dire à la distance $L/3$ du point A.

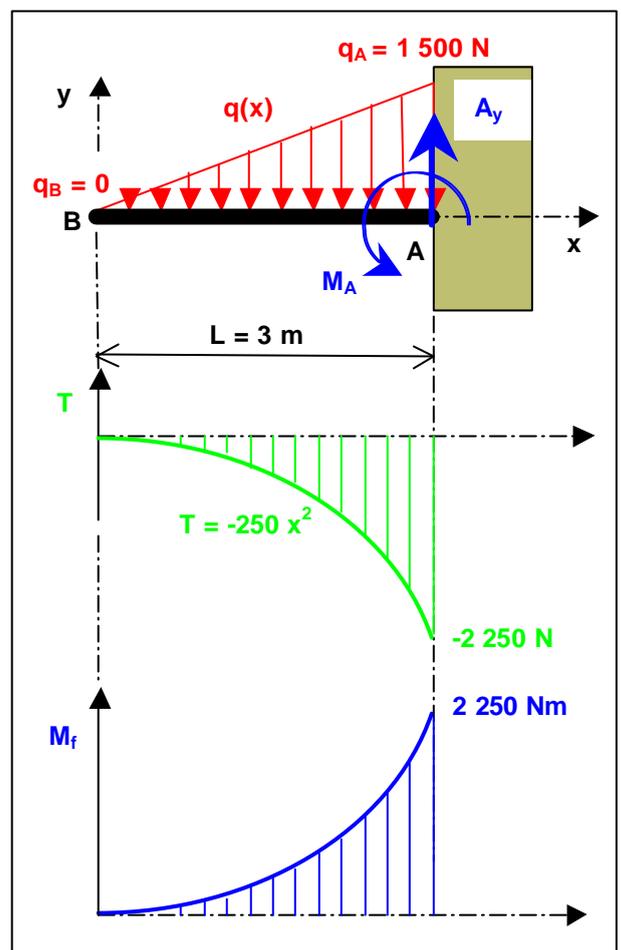
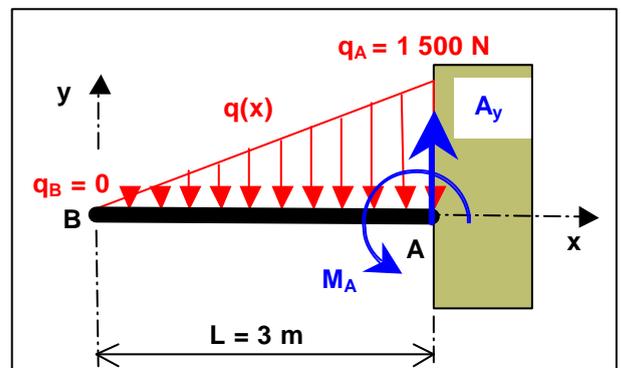
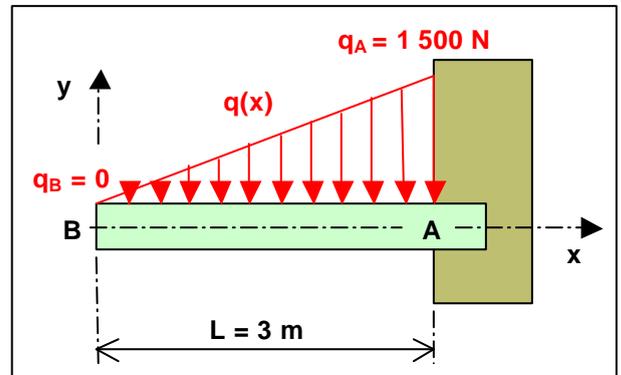
On a donc
$$\begin{cases} A_y - R = 0 \\ R \times \frac{L}{3} + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_y = R = 2250 \text{ N} \\ M_A = -R \times \frac{L}{3} = -2250 \times \frac{3}{3} = -2250 \text{ Nm} \end{cases}$$

❖ Effort tranchant :

$$T_{BA} = -\frac{500 x \times x}{2} = -250 x^2 \text{ N} \text{ (triangle)}$$

❖ Moment fléchissant :



RESISTANCE DES MATERIAUX

$$M_{fBA} = -\frac{500 \times x \times x}{2} \times \frac{x}{3} = -\frac{250}{3} x^3 \text{ Nm}$$

❖ **Diagrammes** : y a qu'à chercher, ils doivent bien traîner par là...

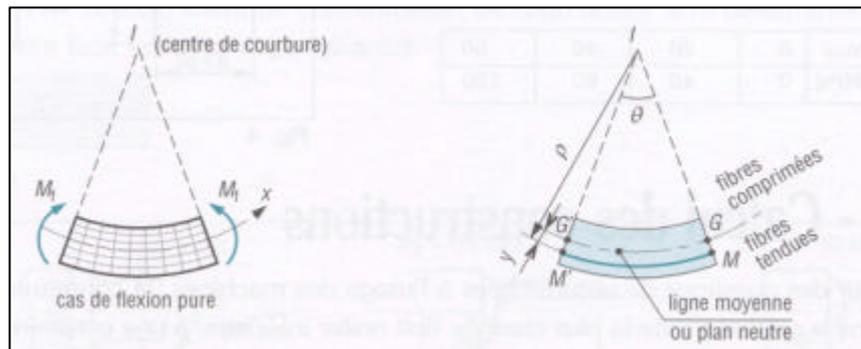
5. Contraintes de flexion

En flexion, les contraintes normales σ sont généralement prépondérantes devant les contraintes de cisaillement τ .

5.1 Contraintes normales en flexion

Les contraintes normales résultent du moment fléchissant M_f (les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur).

Dans le cas de flexion pure ($M_f \neq 0$ et $T = 0$), les poutres se déforment suivant des arcs de cercles.



La ligne moyenne GG' ne subit ni allongement ni raccourcissement (contraintes σ nulles).

Pour la figure proposée, les fibres situées au-dessus de la ligne neutre sont comprimées et supportent des contraintes de compression ; celles situées au-dessous (MM') sont tendues et supportent des contraintes de traction.

En exprimant l'allongement de la fibre MM' , en utilisant la loi de Hooke ($\mathbf{s} = E \mathbf{e}$) et en faisant intervenir le moment fléchissant M_f , on montre la relation suivante :

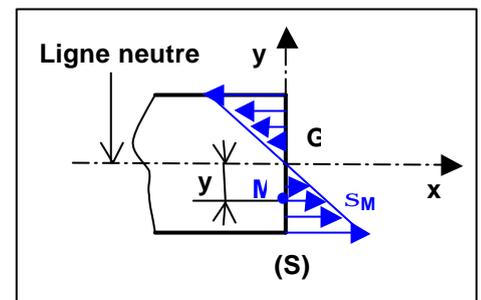
$$s_M = \frac{M_f}{I_z} y$$

avec σ_M la contrainte normale en M (en MPa)

M_f le moment fléchissant dans la section droite S (en Nmm)

y la distance du point M par rapport à la ligne neutre (en mm)

I_z le moment quadratique de la section droite S par rapport à l'axe (G, z) (en mm^4)



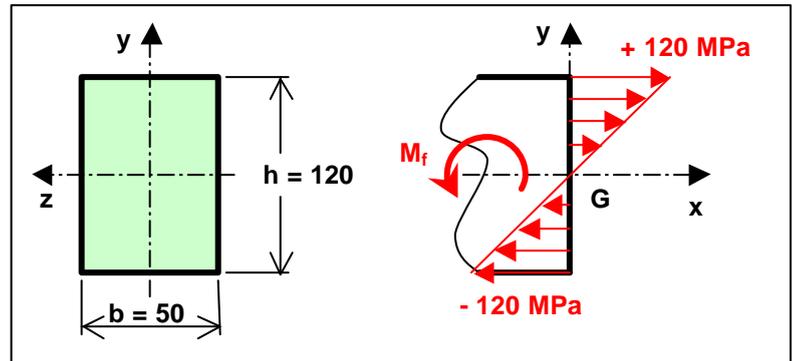
RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : déterminons les contraintes normales dans une poutre rectangulaire (50 mm / 120 mm), soumise à un moment fléchissant de 14.4 kNm constant sur toute sa longueur.

Moment quadratique :

$$I_z = \frac{b h^3}{12} = \frac{50 \times 120^3}{12} = 72.10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Contraintes : } \sigma = \frac{M_f}{I_z} y = \frac{14\,400\,000}{72.10^6} y = 2 y \text{ MPa}$$



Les contraintes augmentent donc linéairement avec la distance à la ligne neutre.

| y (mm) | 0 | 20 | 40 | 60 |
|--------|---|----|----|-----|
| s (mm) | 0 | 40 | 80 | 120 |

5.2 Calcul des constructions

Pour des questions de sécurité liées à l'usage des machines, la contrainte normale σ_{Maxi} dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible liée au matériau et fixée par le constructeur ou par des normes : Rpe.

Dans le cas précis de la flexion, il faut donc procéder ainsi :

- ❖ commencer par déterminer la section la plus chargée (en général celle où le moment fléchissant est maximum) ;
- ❖ puis vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible Rpe imposée par le constructeur.

$$\sigma_{\text{Maxi}} = \frac{M_{f \text{ Maxi}}}{(I_z/V)} \leq Rpe$$

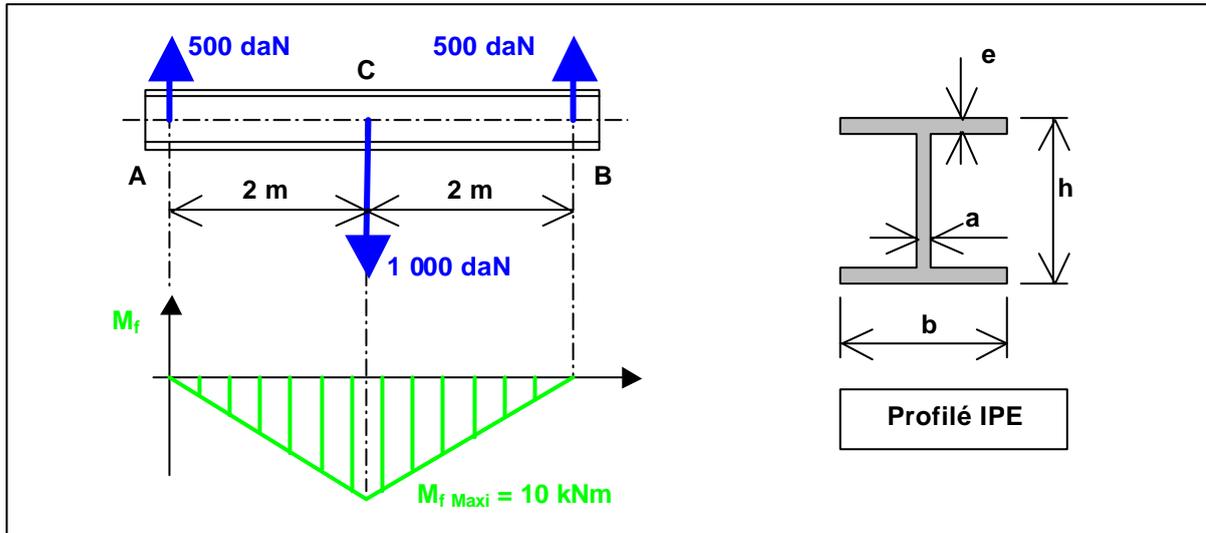
avec $V = y_{\text{Maxi}}$

I_z/V le module de flexion

Rpe la résistance pratique (rappel : $Rpe = Re/s$ avec Re la limite élastique et s le coefficient de sécurité adopté)

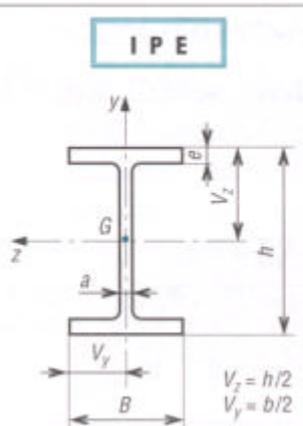
Exemple : une poutre de pont roulant (profilé IPE) est soumise aux charges indiquées sur la figure ci-dessous (cas le plus défavorables). Le moment fléchissant maximum est obtenu au milieu de la poutre et a pour valeur 110 kNm (vous auriez pu le déterminer facilement, mais là n'est pas le problème). Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le profilé pouvant convenir pour construire l'appareil.

RESISTANCE DES MATERIAUX



On doit avoir $s_{Maxi} = \frac{M_{f\ Maxi}}{(I_z/V)} = \frac{10\ 000\ 000}{(I_z/V)} \leq 100\ MPa$

D'où $(I_z/V) \geq 100\ 000\ mm^3 = 100\ cm^3$

| | (mm) | | | | | | I_z (cm ⁴) | I_z/V_z (cm ³) | I_y (cm ⁴) | I_y/V_y (cm ³) | |
|---|------|-----|------|------|-------|-------|--------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------|-------|
| | r | c | ε | e | ξ | m | | | | | |
|  <p>IPE</p> | 80 | 80 | 46 | 3,8 | 5,2 | 7,64 | 6,0 | 80,1 | 20,0 | 8,49 | 3,69 |
| | 100 | 100 | 55 | 4,1 | 5,7 | 10,3 | 8,1 | 171 | 34,2 | 15,9 | 5,79 |
| | 120 | 120 | 64 | 4,4 | 6,3 | 13,2 | 10,4 | 318 | 53,0 | 27,7 | 8,65 |
| | 140 | 140 | 73 | 4,7 | 6,9 | 16,4 | 12,9 | 541 | 77,3 | 44,9 | 12,3 |
| | 160 | 160 | 82 | 5,0 | 7,4 | 20,1 | 15,8 | 869 | 109 | 68,3 | 16,7 |
| | 180 | 180 | 91 | 5,3 | 8,0 | 23,9 | 18,8 | 1 317 | 146 | 101,0 | 22,2 |
| | 200 | 200 | 100 | 5,6 | 8,5 | 28,5 | 22,4 | 1 943 | 194 | 142,0 | 28,5 |
| | 220 | 220 | 110 | 5,9 | 9,2 | 33,4 | 26,2 | 2 772 | 252 | 205,0 | 37,5 |
| | 240 | 240 | 120 | 6,2 | 9,8 | 39,1 | 30,7 | 3 892 | 324 | 284,0 | 47,3 |
| | 270 | 270 | 135 | 6,6 | 10,2 | 45,9 | 36,1 | 5 790 | 429 | 420,0 | 62,2 |
| | 300 | 300 | 150 | 7,1 | 10,7 | 53,8 | 42,2 | 8 356 | 557 | 604,0 | 80,5 |
| | 330 | 330 | 160 | 7,5 | 11,5 | 62,6 | 48,1 | 11 770 | 713 | 788,0 | 98,5 |
| | 360 | 360 | 170 | 8,0 | 12,7 | 72,7 | 57,1 | 16 270 | 904 | 1 043,0 | 123,0 |
| | 400 | 400 | 180 | 8,6 | 13,5 | 84,5 | 66,3 | 23 130 | 1160 | 1 318,0 | 146,0 |
| | 450 | 450 | 190 | 9,4 | 14,6 | 98,8 | 77,6 | 33 740 | 1500 | 1 676,0 | 176,0 |
| | 500 | 500 | 200 | 10,2 | 16,0 | 116,0 | 90,7 | 48 200 | 1930 | 2 142,0 | 214,0 |
| 550 | 550 | 210 | 11,1 | 17,2 | 134,0 | 106,0 | 67 120 | 2440 | 2 667,0 | 254,0 | |
| 600 | 600 | 220 | 12,0 | 19,0 | 156,0 | 122,0 | 92 080 | 3070 | 3 387,0 | 308,0 | |

Le tableau de dimensions nous donne le profilé IPE de 160 pour lequel $(I_z/V) = 109\ cm^3$.

Avec ce profilé, la contrainte maximale sera alors de :

$$s_{Maxi}' = \frac{10\ 000\ 000}{109\ 000} = 91,74\ MPa$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

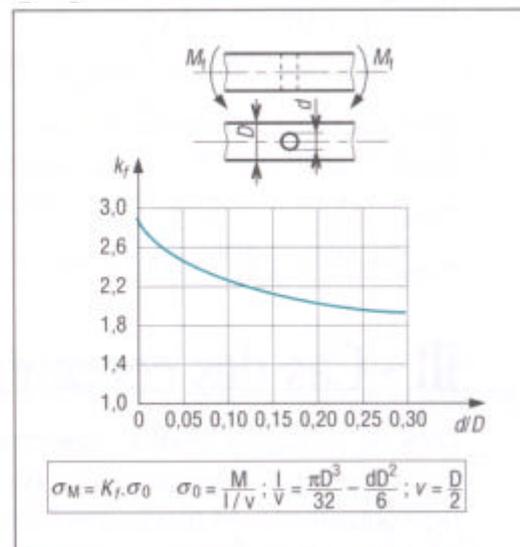
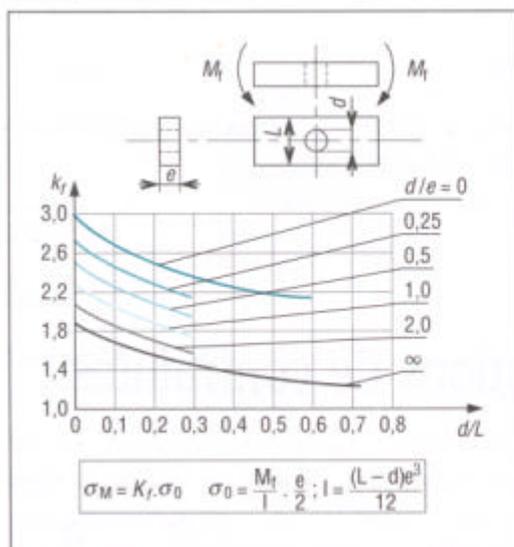
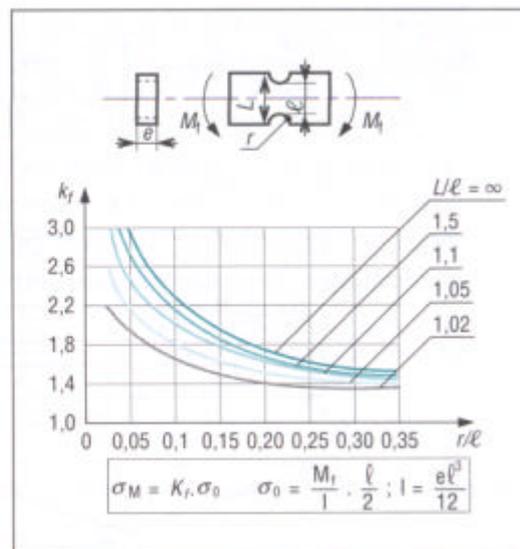
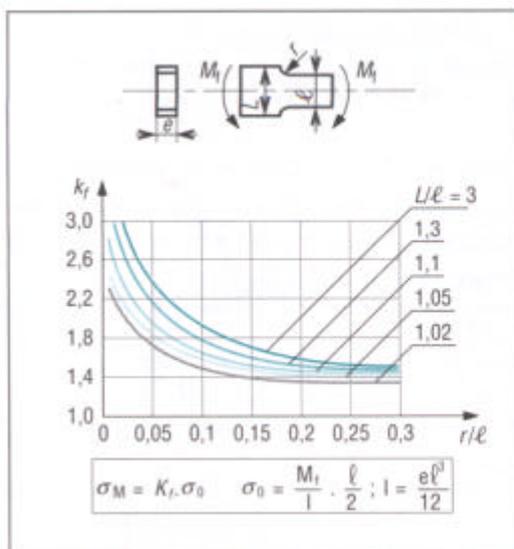
5.3 Concentration de contraintes en flexion

Lorsque les solides étudiés présentent de brusques variations de section, les relations précédentes ne s'appliquent plus. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus proportionnelle à la distance y et σ_{Maxi} est supérieure à la valeur $\frac{M_f Maxi}{(I_z/V)} = s_0$: on dit qu'il y a concentration de contraintes.

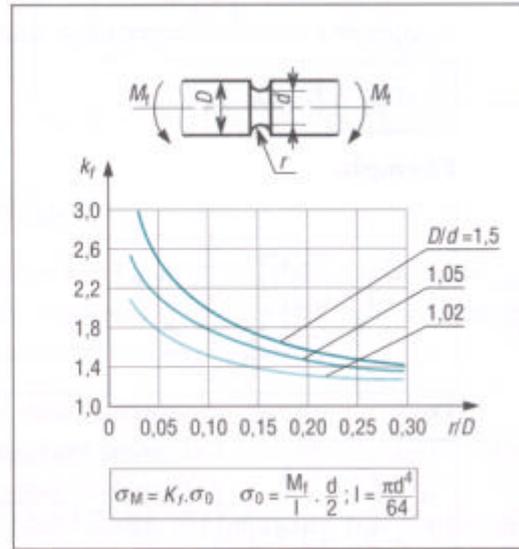
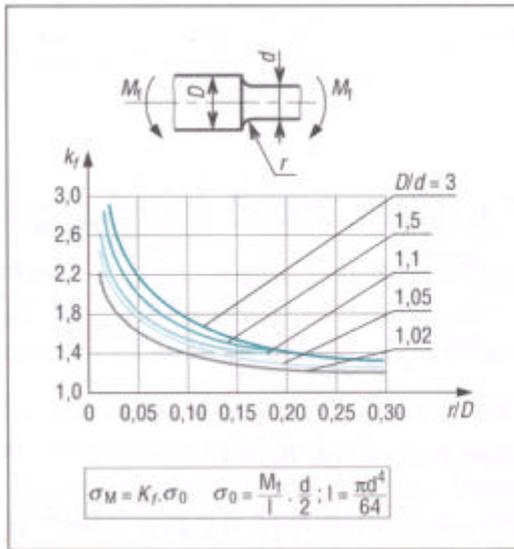
On a alors pour la contrainte maximale :

$$s_{Maxi} = K_f \cdot s_0$$

Les valeurs de K_f (coefficient de concentration de contraintes) étant déterminées expérimentalement (voir abaques suivants).



RESISTANCE DES MATERIAUX



Exemple trivial : déterminons la contrainte maximale dans l'arbre suivant, soumis à un moment de flexion M_f de 1 227 Nm :

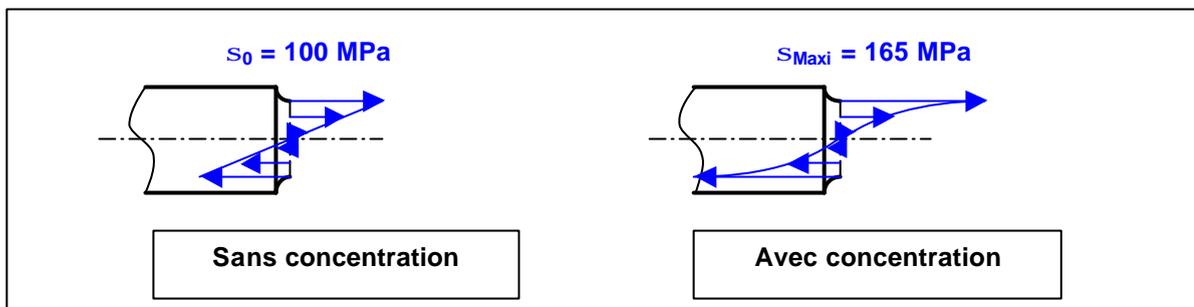
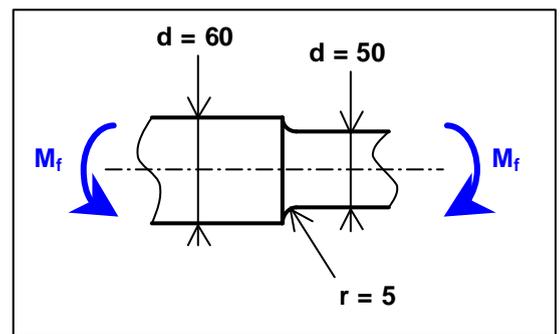
$$\frac{r}{d} = \frac{5}{50} = 0.1 \quad \text{et} \quad \frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

Le tableau qui va bien indique $K_f = 1.65$

$$\text{Or } \frac{I_z}{V} = \frac{p \cdot d^4 / 64}{d/2} = \frac{p \cdot d^3}{32} = \frac{p \times 50^3}{32} = 12272 \text{ mm}^3$$

$$s_0 = \frac{M_f}{(I_z/V)} = \frac{122700}{12272} = 10 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$$

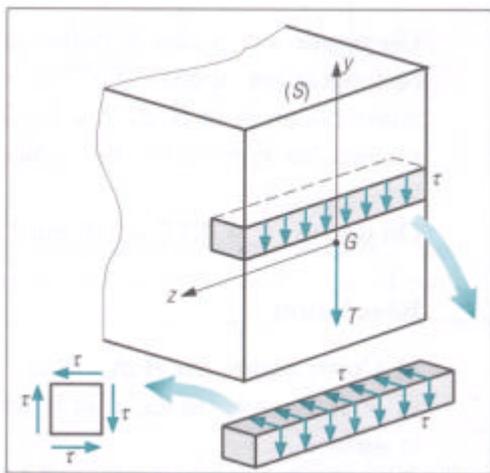
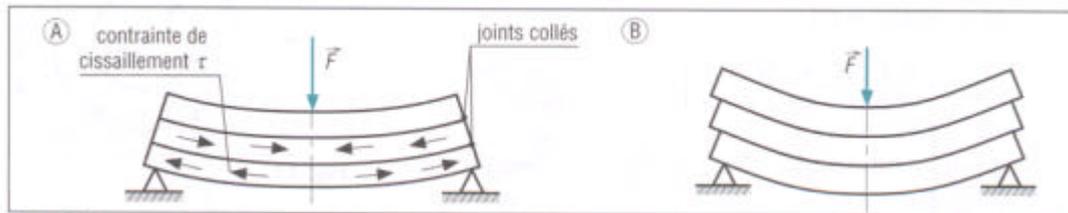
On a donc pour la contrainte maximale $s_{\text{Maxi}} = K_f \cdot s_0 = 1.65 \times 10 = 16.5 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$



RESISTANCE DES MATERIAUX

5.4 Contraintes de cisaillement en flexion

5.4.1 Mise en évidence



Pour l'exemple ci-dessus, les contraintes de cisaillement τ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien (évitent le glissement) entre les poutres respectives et limitent ainsi les déformations.

La figure ci-contre donne la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T.

Si les contraintes τ conservent une valeur constante suivant l'axe z, en revanche elles varient suivant y, avec un maximum près du plan neutre (**inverse des contraintes normales s**).

5.4.2 Cas des poutres rectangulaires

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par :

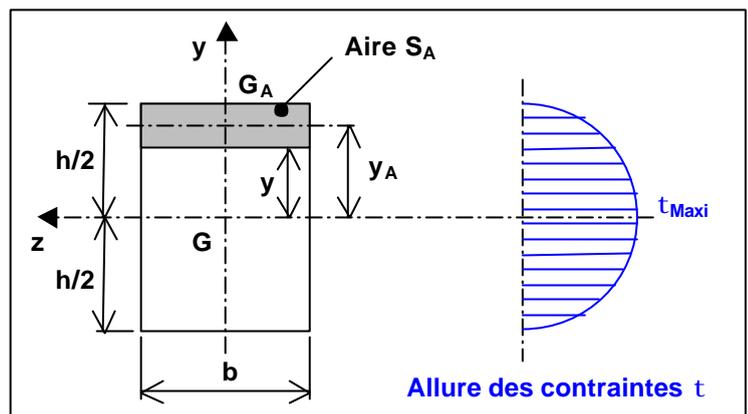
$$t = \frac{T Q}{I_z b} \quad \text{avec} \quad Q = y_A S_A = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

et τ la contrainte de cisaillement à la distance y (MPa)

Q le moment statique de l'aire hachurée S_A (mm^3)

T l'effort tranchant (N)

I le moment quadratique de la section S par rapport à (G, z) (mm^4)



Remarque : la contrainte est maximale au niveau du plan neutre ($y = 0$) :

$$t_{Maxi} = \frac{3T}{2S} = \frac{T h^2}{8 I_z}$$

Elle est de 50% plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur.

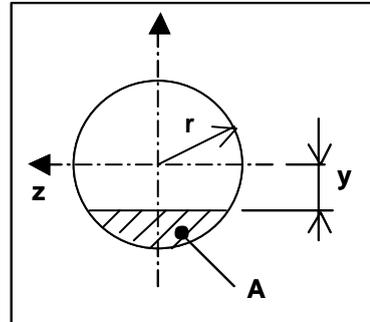
RESISTANCE DES MATERIAUX

5.4.3 Cas des poutres circulaires

❖ Section circulaire pleine : $S = p r^2$

$$Q = \frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2}$$

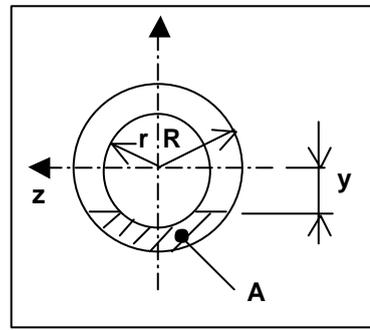
$$t = \left(\frac{4T}{3p r^2} \right) \sqrt{r^2 - y^2} \quad ; \quad t_{Maxi} = \frac{4T}{3S}$$



❖ Section circulaire creuse : $S = p (R^2 - r^2)$

$$Q = \frac{2}{3} (R^3 - y^3)$$

$$t_{Maxi} = \frac{4T}{3S} \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2} \right)$$



Pour un tube mince : $t_{Maxi} \approx \frac{2T}{S}$

5.4.4 Exemple

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensemble en A et B. Si l'effort tranchant est $T = 13.5$ kN, déterminer les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne $I_z = 43,7 \cdot 10^6$ mm⁴.

❖ Contraintes en A :

y_A = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_A .

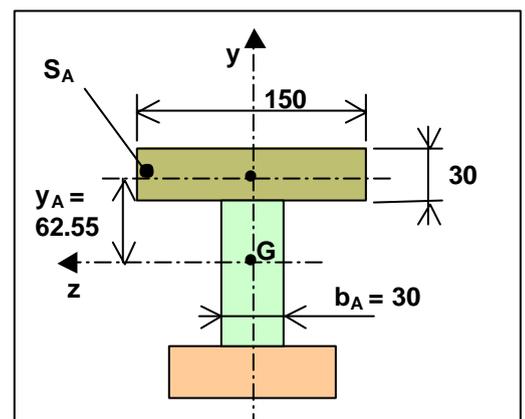
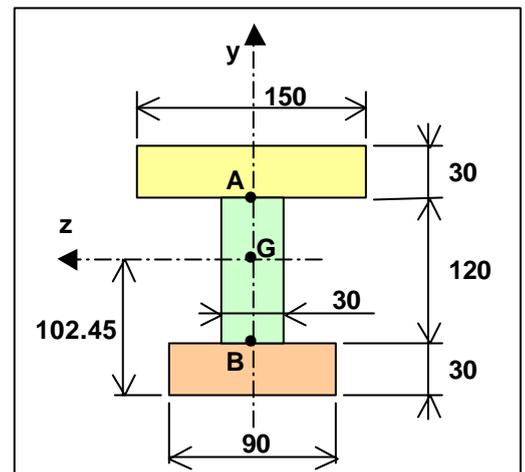
$$Q_A = S_A y_A = (150 \times 30) \times 62.55 = 281475 \text{ mm}^3$$

$$t_A = \frac{T Q_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43,7 \cdot 10^6 \times 30} = 2.9 \text{ MPa}$$

❖ Contraintes en B :

y_B = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_B .

$$Q_B = S_B y_B = (90 \times 30) \times 87.45 = 236115 \text{ mm}^3$$



RESISTANCE DES MATERIAUX

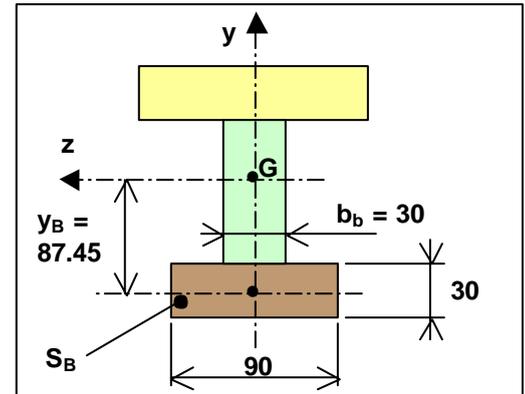
$$t_B = \frac{T Q_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236115}{43,7 \cdot 10^6 \times 30} = 2,4 \text{ MPa}$$

❖ Remarque : $I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$

$$I_{z1} = \frac{150 \times 30^3}{12} + (150 \times 30) \times 62,55^2 = 17,95 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{90 \times 30^3}{12} + (90 \times 30) \times 87,45^2 = 20,85 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{30 \times 90^3}{12} + (30 \times 90) \times 12,545^2 = 4,88 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



6. Déformations en flexion

Dans ce qui précède, on s'est intéressé aux poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.

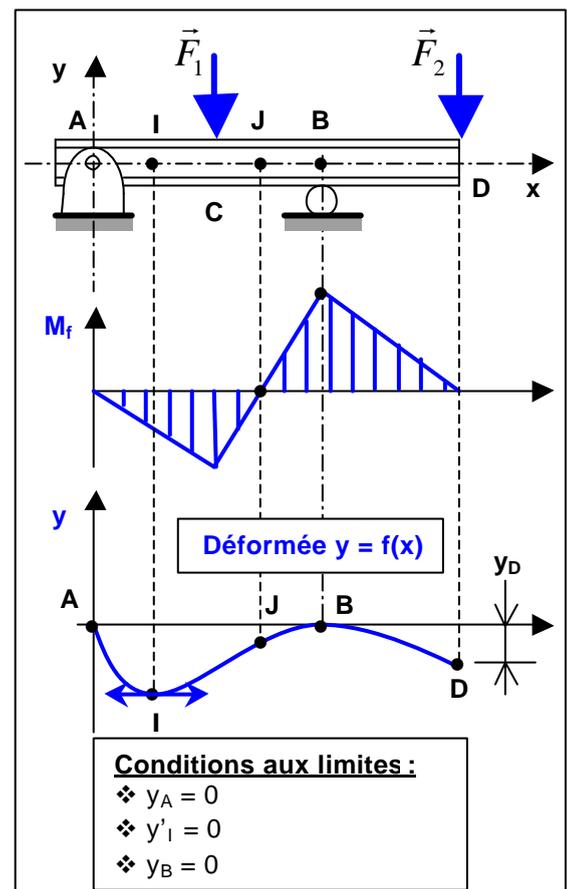
6.1 Notion de déformée

Pour la poutre ci-contre, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe $y = f(x)$ après déformation. Cette courbe est appelée déformée.

$y = f(x)$ est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y).

Conditions aux limites : les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_I = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches : la déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) : $f_I = y_I$ et $f_D = y_D$



RESISTANCE DES MATERIAUX

6.2 Méthode par intégration

6.2.1 Principe

Connaissant l'équation des moments fléchissants M_f en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M_f = -E I y''$$

avec M_f le moment fléchissant (équation en x)

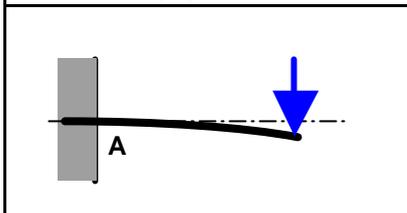
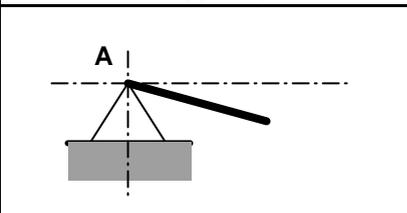
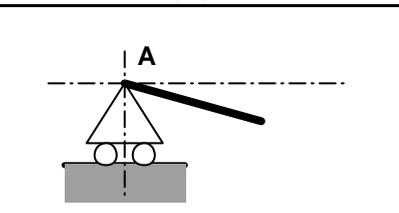
E le module d'élasticité longitudinale (MPa)

$I = I_z$ le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm^4)

Y'' la dérivée seconde de la déformée y

Remarque : les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

EXEMPLES USUELS DE CONDITIONS AUX LIMITES

| ENCASTREMENT | ARTICULATION | APPUI SIMPLE |
|---|---|--|
|  |  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> ❖ $y'_A = 0$ ❖ $y_A = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$ | <ul style="list-style-type: none"> ❖ $y_A = 0$ |

6.2.2 Exemple

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 4$ m, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.

L'étude statique permet de déterminer les actions des appuis sur la poutre :

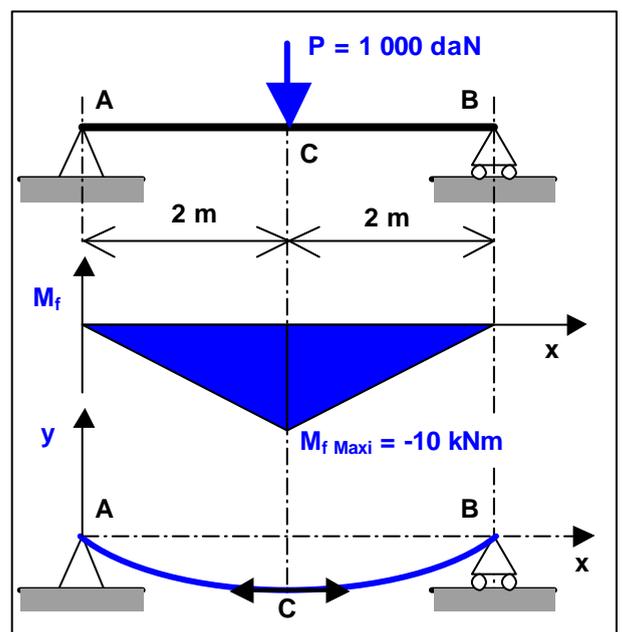
$$A = B = \frac{P}{2} = 500 \text{ daN}$$

Moments fléchissants :

❖ pour $0 \leq x \leq 2$ m

$$M_{fAC} = -\frac{P}{2} x = -500 x$$

❖ pour $2 \leq x \leq 4$ m



RESISTANCE DES MATERIAUX

$$M_{f_{BC}} = -\frac{P}{2}x + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 500(x - 4)$$

Equation de la déformée : $M_{f_{AC}} = -EI y_{AC}''$

On a donc $-EI y_{AC}'' = -\frac{P}{2}x$ ou encore $EI y_{AC}'' = \frac{P}{2}x$

La première intégration donne : $EI y_{AC}' = \frac{P x^2}{4} + C_1$ (1)

La seconde intégration donne : $EI y_{AC} = \frac{P x^3}{12} + C_1 x + C_2$ (2)

Conditions aux limites :

❖ on a $y = 0$ au point A ($x = 0$) : l'équation (2) donne $C_2 = 0$

❖ et $y'_C = 0$ au point C ($x = L/2$) : l'équation (1) donne $C_1 = -\frac{P \times (L/2)^2}{4} = -\frac{P L^2}{16}$

Enfinement : $y_{AC}' = \frac{P}{4EI} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right)$ et $y_{AC} = \frac{P}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4} x \right)$

Flèche : la flèche maximale est obtenue pour $x = L/2$: $f_{Maxi} = y_C = -\frac{P L^3}{48EI}$

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

