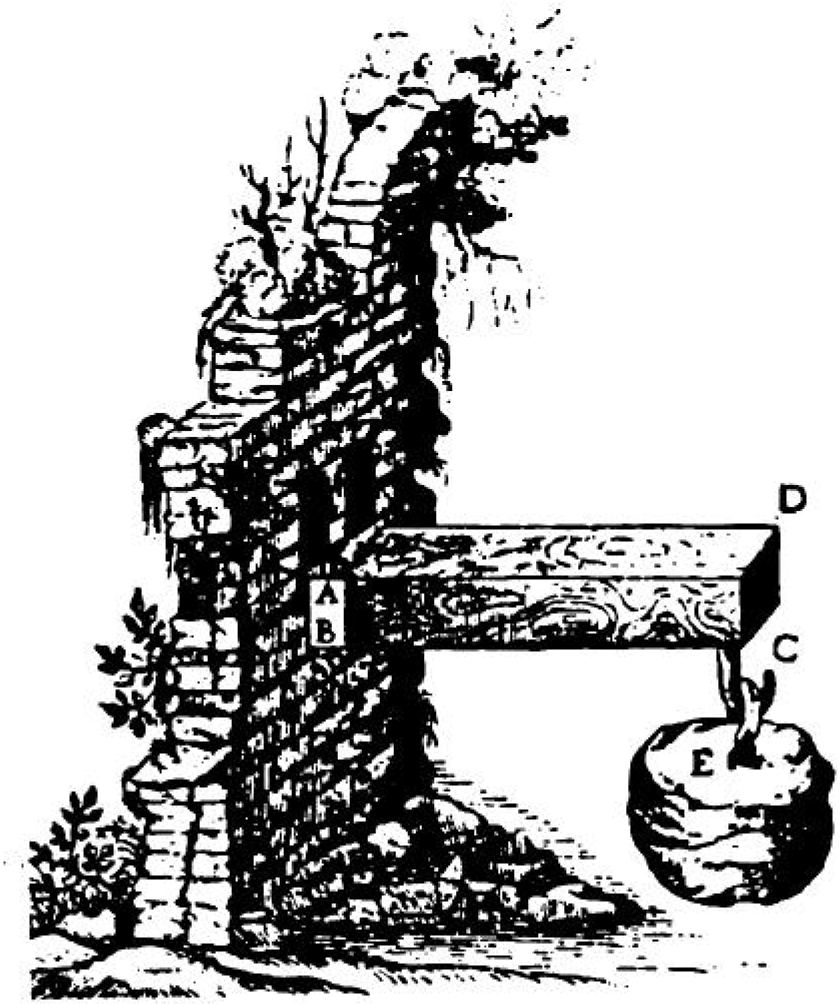
RESISTANCE DES MATERIAUX

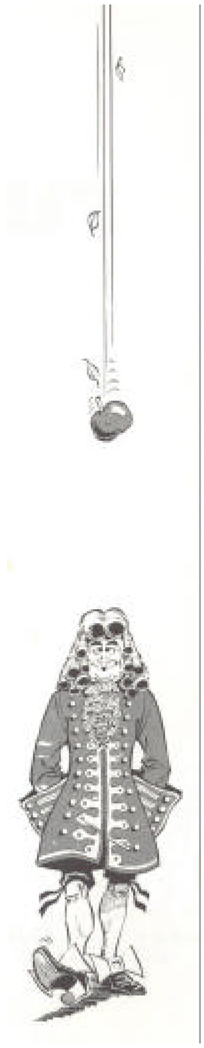
TORSION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

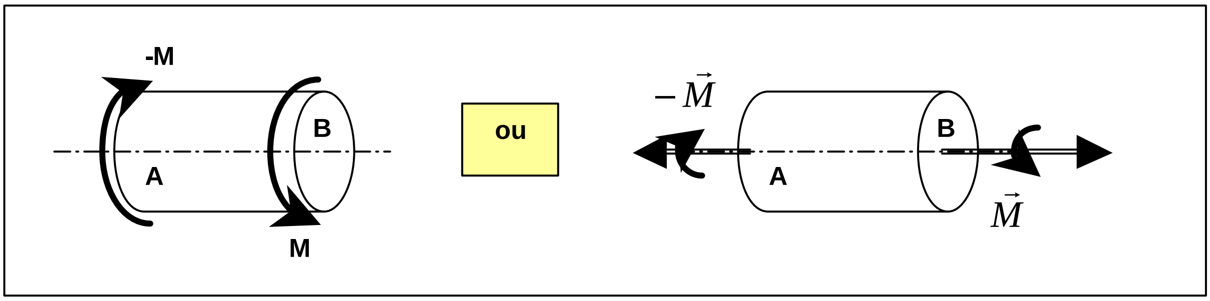
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

SOMMAIRE

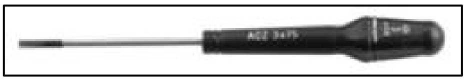


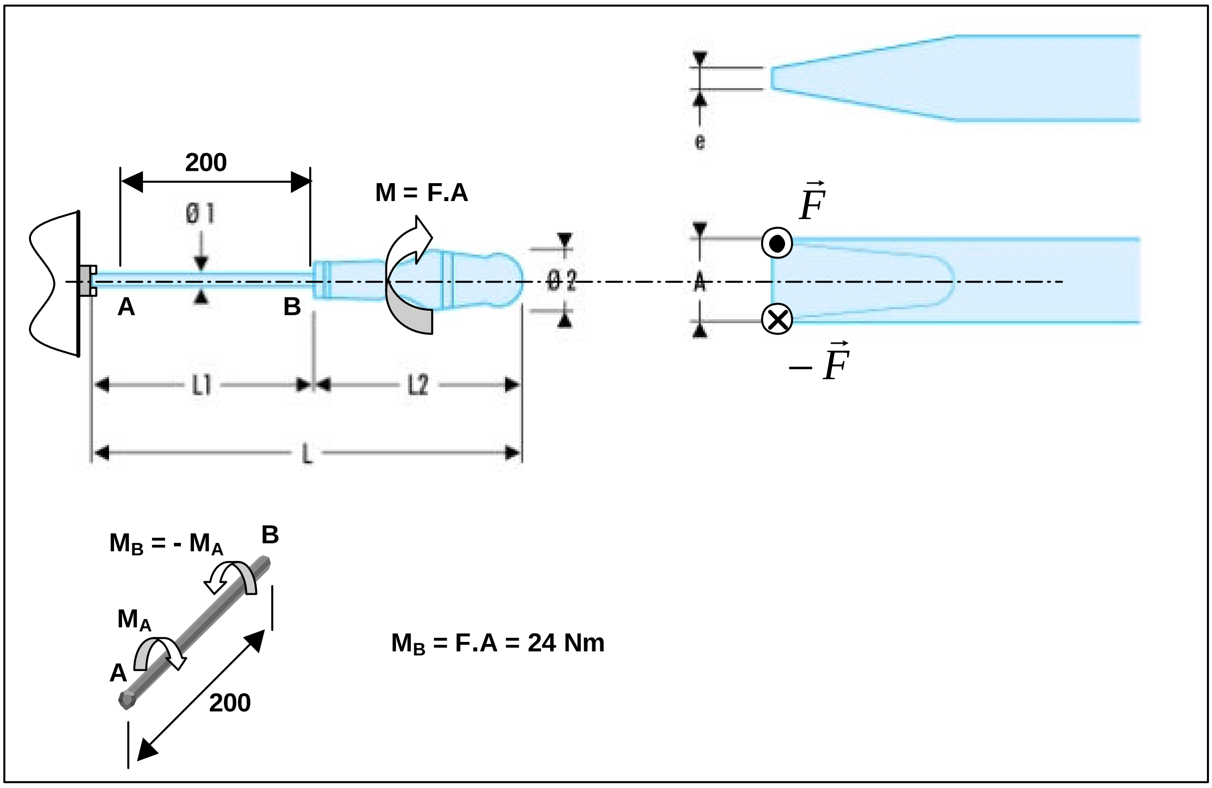
1. Définition - Exemples

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples M et –M égaux et opposés d'axe la ligne moyenne Lm.



Exemple : tige de tournevis.

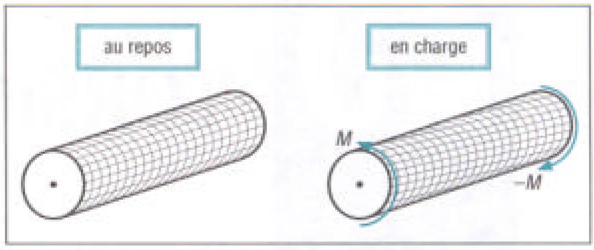


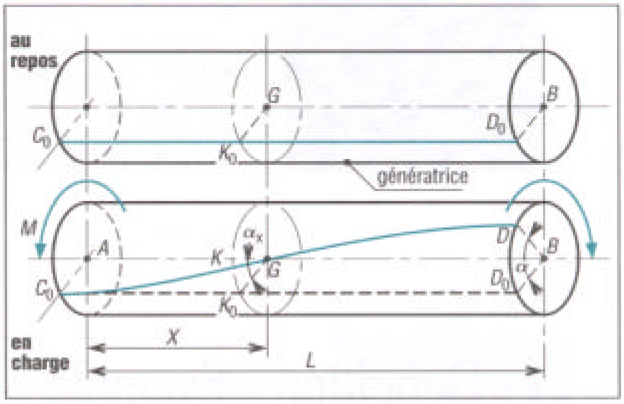


2. Déformations – Angle de torsion θ

2.1 Constatations expérimentales

Les sections droites avant déformation restent droites après déformation (planes et perpendiculaires à la ligne moyenne).
Les fibres ou génératrices initialement parallèles à la ligne moyenne s'enroulent suivant des hélices autour de cet axe. La longueur des fibres restent sensiblement invariable ou constante (hypothèse des petites déformations).
Les sections droites tournent ou glissent en bloc les unes par rapport aux autres (rotations d'axe le ligne moyenne). Les rayons GK restent droits dans le domaine élastique, mais s'incurvent dans le domaine plastique.





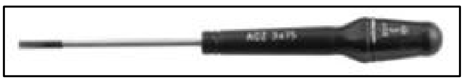
α_x = angle (GK_0,GK) = angle de torsion entre les sections droites A et G
α = angle (BD_0,BD) = angle de torsion de la poutre.

2.2 Angle unitaire de torsion θ

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci. Autrement dit :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_x}{X} = \theta \quad \text{= angle unitaire de torsion}$$

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M = 24 Nm, si l'angle de torsion α_{AB} mesuré entre A et B est égal à 14.6°. Déterminons θ :

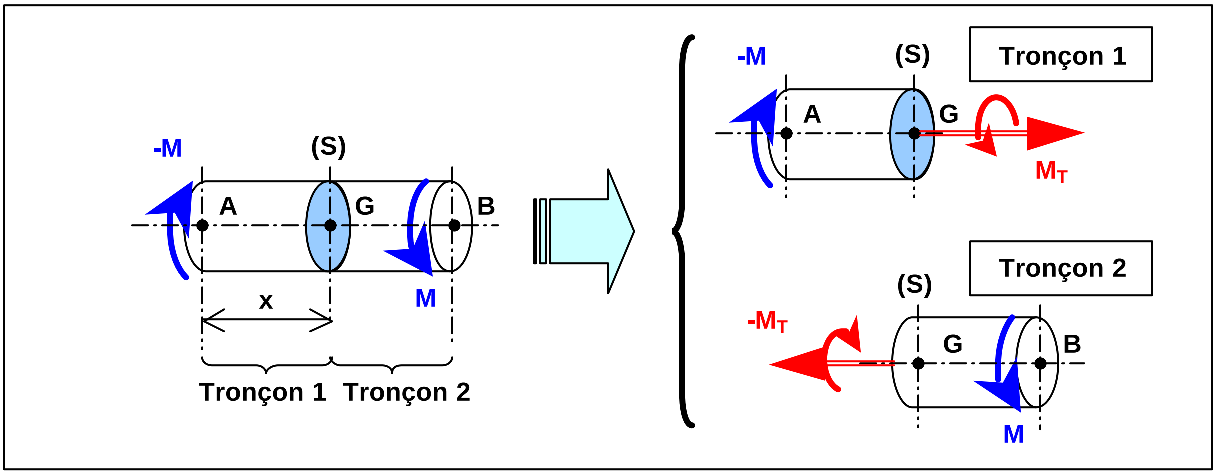


$$\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14.6}{200} = 0.073°.mm^{-1}$$

ou encore $\theta = 73°.m^{-1} = \dfrac{73\pi}{180} = 1.274\ rad.m^{-1}$

3. Efforts intérieurs – Moment de torsion

La démarche reste la même qu'aux chapitres précédents, on pratique une coupure fictive (S) dans la poutre afin de la diviser en deux tronçons pour faire apparaître et calculer (statique) les efforts intérieurs ou de cohésion (S est une section droite).



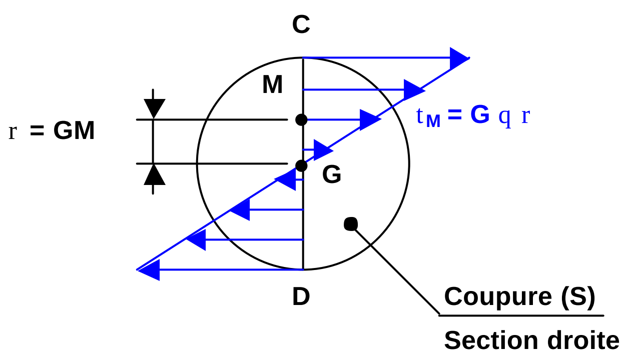
L'étude de l'équilibre de l'un ou l'autre tronçon montre que les actions de cohésion se réduisent à un couple de torsion M_T d'axe la ligne moyenne (x), tel que :

$$M_T = M$$

Remarque : dans le cas de la torsion, tous les autres efforts intérieurs sont nuls ($N = T = M_f = 0$).

4. Contraintes tangentielles de torsion

En torsion, et dans le cas des petites déformations, les contraintes normales σ sont négligeables. Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ. A partir de la relation « $\tau = G\,\gamma$ » obtenue au chapitre « Cisaillement », on montre que la contrainte τ_M, en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance ρ = GM, entre le point et la ligne moyenne.



$$\boxed{\tau = G\,\theta\,\rho}$$

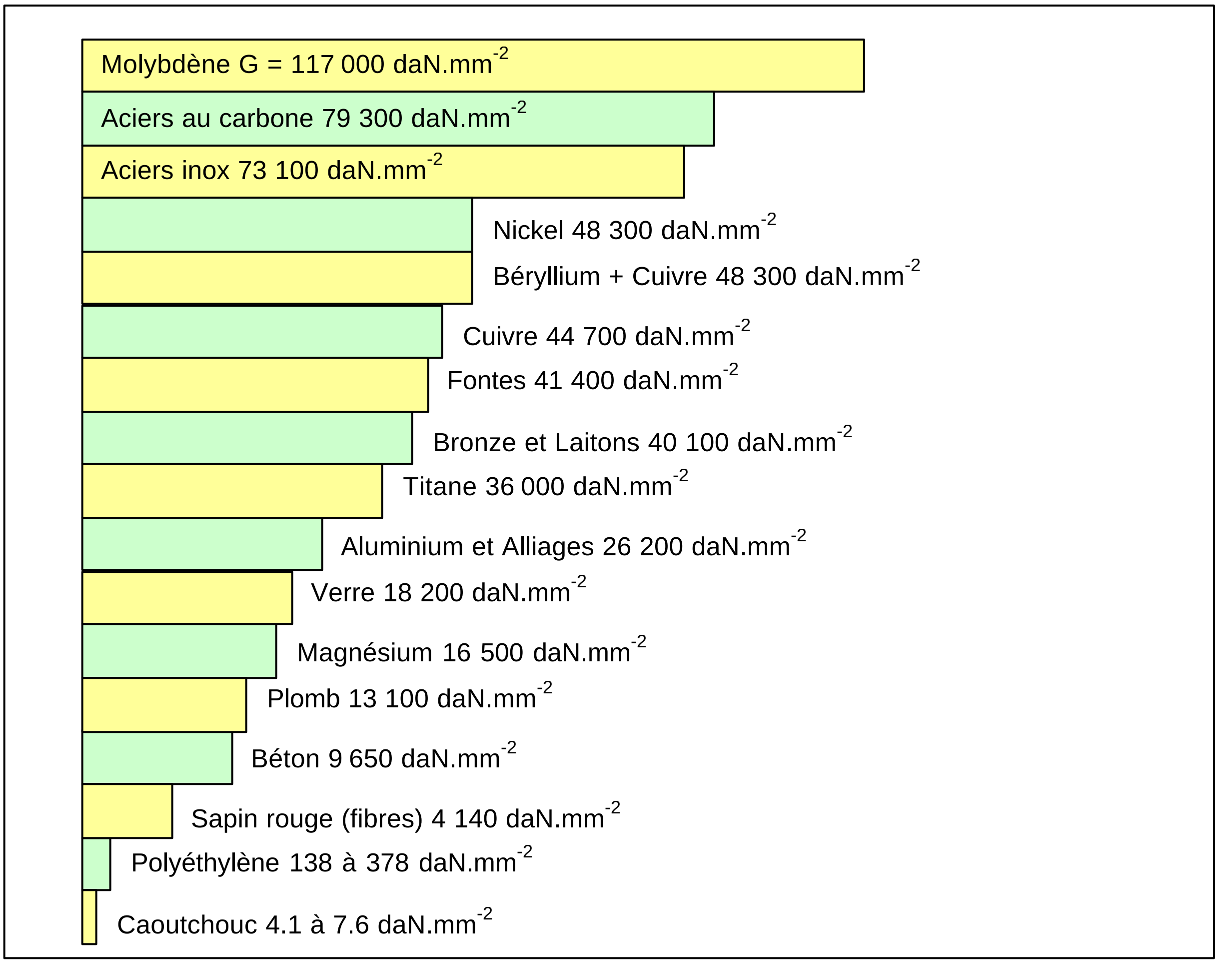
- τ : contrainte (MPa)
- θ : angle unitaire de torsion ($rad.mm^{-1}$)
- ρ : rayon GM (mm)
- G : module d'élasticité transversal (MPa)

Remarque : tous les points situés sur un même cercle de centre G et de rayon ρ ont même contrainte. Les contraintes sont maximales à la périphérie :

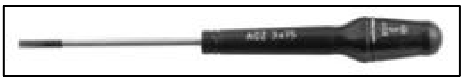
$$\tau_{Maxi} = G\,\theta\,R \quad \text{pour} \quad \rho_{Maxi} = R$$

Pour les métaux : $G \approx 0.4\,E$

4.1 Exemples de valeurs de G



Exemple : reprenons le cas de la tige de tournevis, G = 80 GPa, θ = 73°.m^{-1}. Déterminons la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.



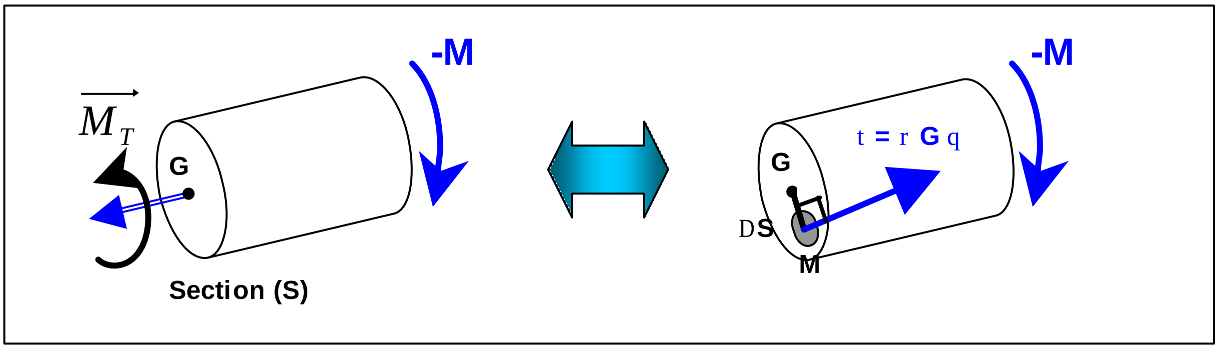
Diamètre de la tige : d = 7 mm d'où ρ_{Maxi} =3.5 mm

$$\theta = 73°.m^{-1} = \frac{73\pi}{180} = 1.27\ rad.m^{-1} = 0.00127\ rad.mm^{-1}$$

d'où la contrainte $$\tau_{Maxi} = G\,\theta\,\rho_{Maxi} = 80\,000 \times 0.00127 \times 3.5 = 356\ N.mm^{-2}$$

5. Relation entre M_T et q

En chaque point M de la coupure s'exerce, pour l'élément de surface ΔS autour de M, une force élémentaire $\Delta\vec{f} = \vec{t} \cdot \Delta S$ dont la direction est perpendiculaire à GM.

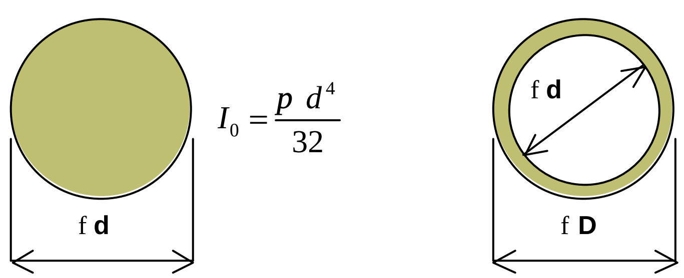


Le moment en G de cette force est $M_G\left(\overrightarrow{\Delta f}\right) = \Delta f \cdot GM = \Delta f \cdot r$

Le moment de torsion M_T est égal au moment résultant en G de toutes les forces élémentaires $\Delta\vec{f}$ de la section (S).

$$M_T = \sum_{(S)} M_G\left(\overrightarrow{\Delta f}\right) = \sum_{(S)} \Delta f \cdot r = \sum_{(S)} t \; r \; \Delta S = \sum_{(S)} G \, q \; r^2 \, \Delta S$$
$$= G \, q \sum_{(S)} r^2 \, \Delta S = G \, q \int_{(S)} r^2 \, dS$$
$$= G \, q \; I_0$$

Le terme $\int_{(S)} r^2 \, dS = G \, q \; I_0$ est le moment polaire de la section (S) par rapport au point G.

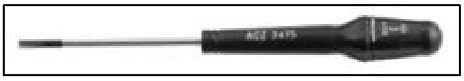


$$I_0 = \frac{p \; d^4}{32} \qquad I_0 = \frac{p \left(D^4 - d^4\right)}{32}$$

L'angle unitaire de torsion θ est proportionnel au moment de torsion M_T : **M_T = G q I_0**

avec M_T le moment de torsion (Nmm)
G le module d'élasticité transversal (MPa)
θ l'angle unitaire de torsion (rad.mm^{-1})
I_0 le moment polaire par rapport au point G (mm^4)

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M_T = 24 Nm, d = 7 mm et G = 80 GPa. Déterminons l'angle unitaire de torsion.



Moment polaire de la section droite : $I_0 = \frac{p\ d^4}{32} = \frac{p\ 7^4}{32} = 235.7\ mm^4$

Angle unitaire de torsion : $q = \frac{M_T}{G\ I_0} = \frac{24.10^3}{80\,000 \times 235.7} = 0.00127\ rad.mm^{-1}$

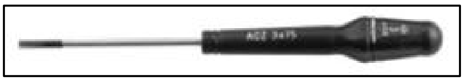
6. Relation entre t et M_T

A partir des relations t **= G** q r et $\mathbf{M_T}$ **= G** q $\mathbf{I_0}$ on peut écrire : $G q = \frac{t}{r} = \frac{M_T}{I_0}$

On obtient ainsi : $t = \frac{M_T}{I_0}\ r$

avec τ la contrainte de cisaillement (MPa)
M_T le moment de torsion (Nmm)
ρ le rayon (mm)
I_0 le moment polaire (mm^4)

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M_T = 24 Nm, d = 7 mm. Déterminons la contrainte tangentielle et la contrainte tangentielle maximale.



$I_0 = 235.7\ mm^4$ et $t = \frac{24\,000}{235.7}\ r = 102\ r \quad N.mm^{-2}$

$$t_{Maxi} = 102\ r_{Maxi} = 102 \times 3.5 = 356 \quad N.mm^{-2}$$

7. Calcul des constructions

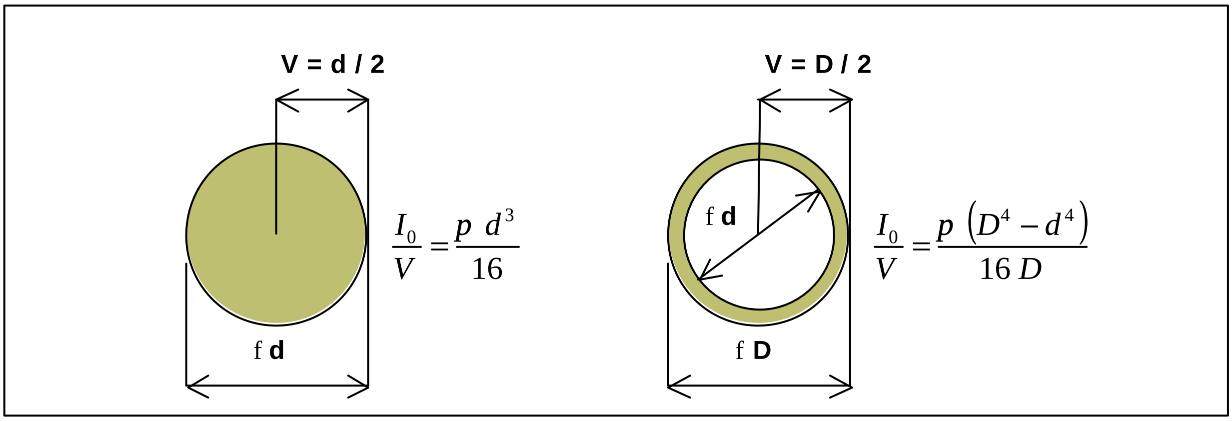
Sauf pour le cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle maximale τ_{Maxi} doit rester inférieure à la résistance pratique au glissement ou au cisaillement Rpg du matériau. Autrement dit :

$$t_{Maxi} = \frac{M_T}{I_0}\ r_{Maxi} = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} \leq Rpg \qquad \text{avec} \qquad r_{Maxi} = V \qquad \text{et} \qquad Rpg = \frac{Re\ g}{s}$$

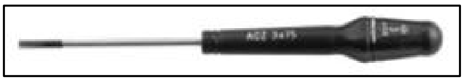
avec Reg la limite élastique au cisaillement du matériau (MPa)
s le coefficient de sécurité

Pour les métaux $\mathrm{Re}\,g \approx \frac{\mathrm{Re}}{2}$

$\frac{I_0}{V}$ est le module de torsion (mm^3)



Exemple : pour le tournevis précédent, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 GPa. Déterminons la valeur maximale du diamètre *d* lorsque $M_{T\ Maxi}$ = 24 Nm.



Contrainte tangentielle maximale : $\tau_{Maxi} = \dfrac{24000}{\left(\dfrac{I_0}{V}\right)} = \dfrac{24000}{\left(\dfrac{\pi\, d^3}{16}\right)} \leq Rpg = 200\ N.mm^{-2}$

d'où on tire $d \geq 8.5\ mm$

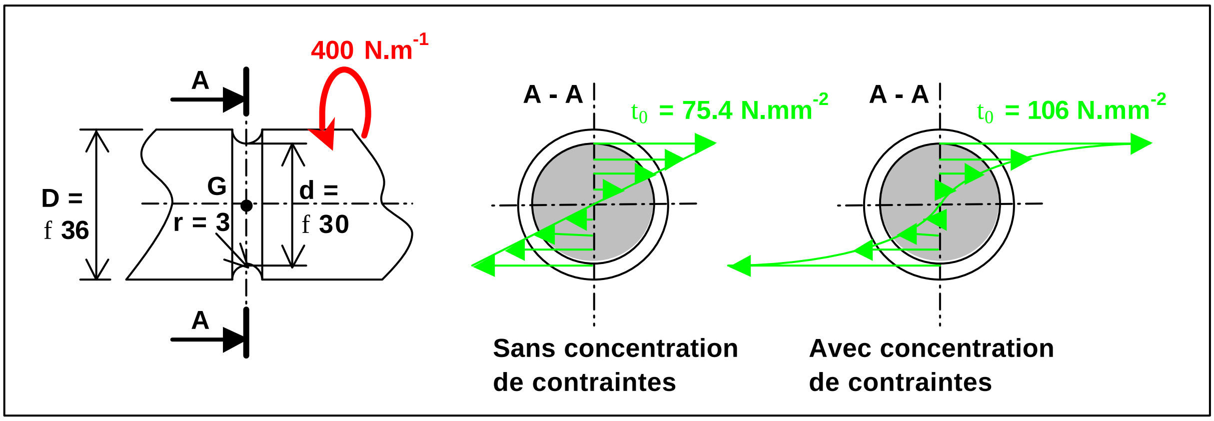
8. Concentration de contraintes

Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou de perçage…), les relations précédentes ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes est modifiée, τ_{Maxi} est supérieure à τ calculée : on dit alors qu'il y a concentration de contraintes.

Si K_{ts} est le coefficient de concentration de contraintes :

$$\tau_{Maxi} = K_{ts} \cdot \tau_0 \qquad \text{avec} \qquad \tau_0 = \frac{M_T}{\left(\dfrac{I_0}{V}\right)}$$

Exemple : déterminons la contrainte au fond d'une gorge d'un arbre de transmission soumis à un couple de torsion de 400 Nm.

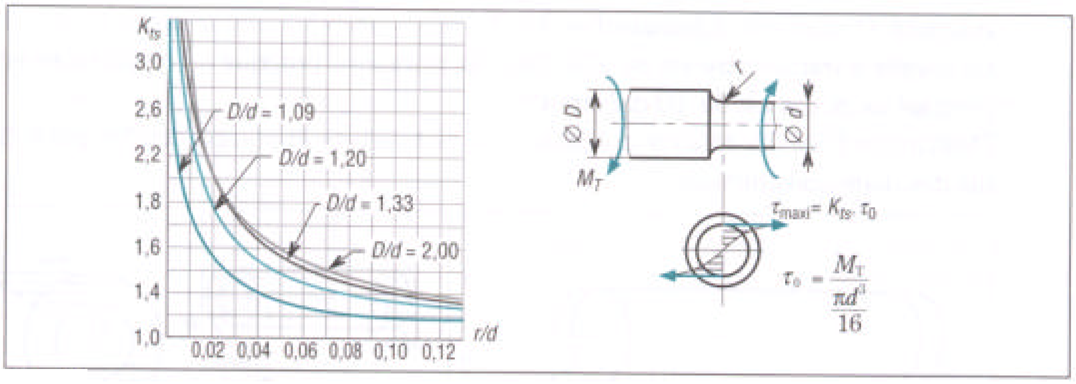


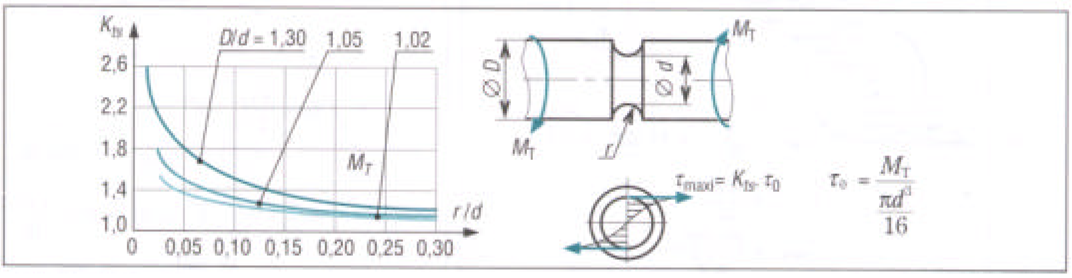
Déterminons K_{ts} : $\frac{r}{d} = \frac{3}{30} = 0.1$ et $\frac{D}{d} = \frac{36}{30} = 1.2$

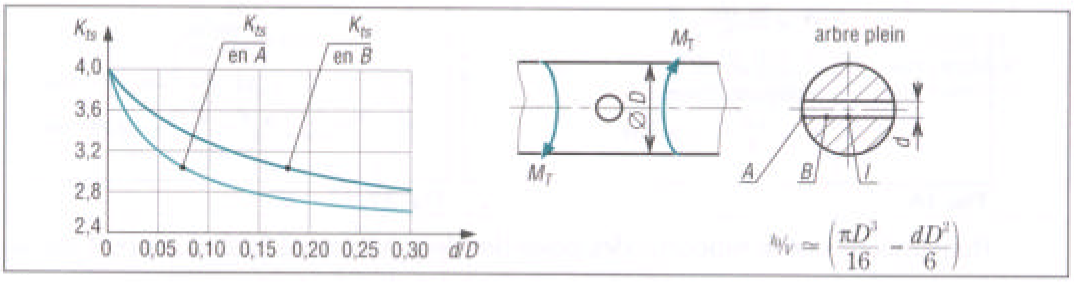
Le tableau qui va bien nous donne alors $K_{ts} \approx 1.4$

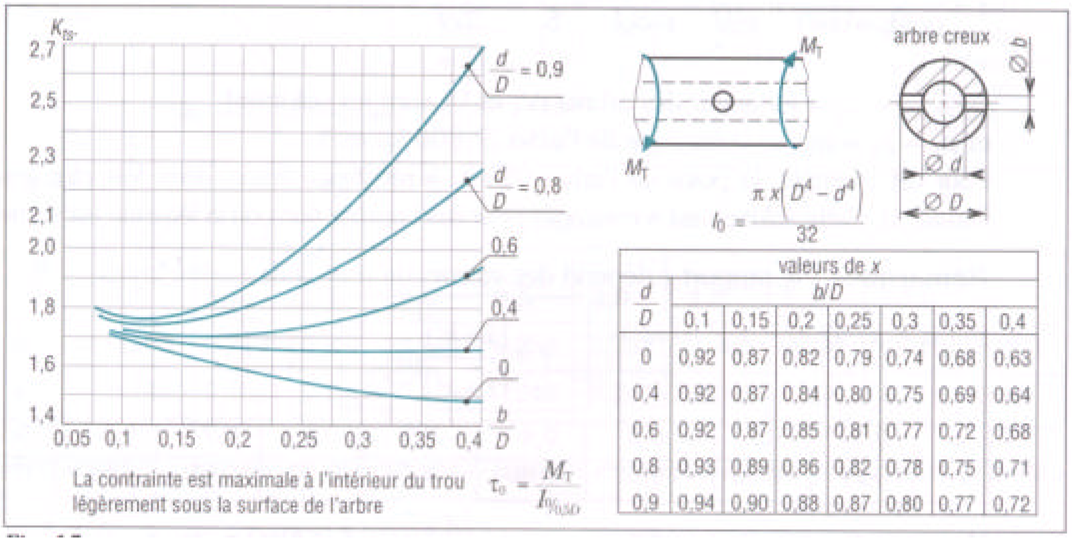
Contrainte $t_0 = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} = \frac{M_T \times 16}{p\ d^3} = \frac{400000 \times 16}{p\ 30^3} = 75.45\ N.mm^{-2}$

Contrainte maximale $t_{Maxi} = K_{ts} \cdot t_0 = 1.4 \times 75.45 = 105.63\ N.mm^{-2}$









	valeurs de x						
$\frac{d}{D}$	b/D						
	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
0	0,92	0,87	0,82	0,79	0,74	0,68	0,63
0,4	0,92	0,87	0,84	0,80	0,75	0,69	0,64
0,6	0,92	0,87	0,85	0,81	0,77	0,72	0,68
0,8	0,93	0,89	0,86	0,82	0,78	0,75	0,71
0,9	0,94	0,90	0,88	0,87	0,80	0,77	0,72

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui…