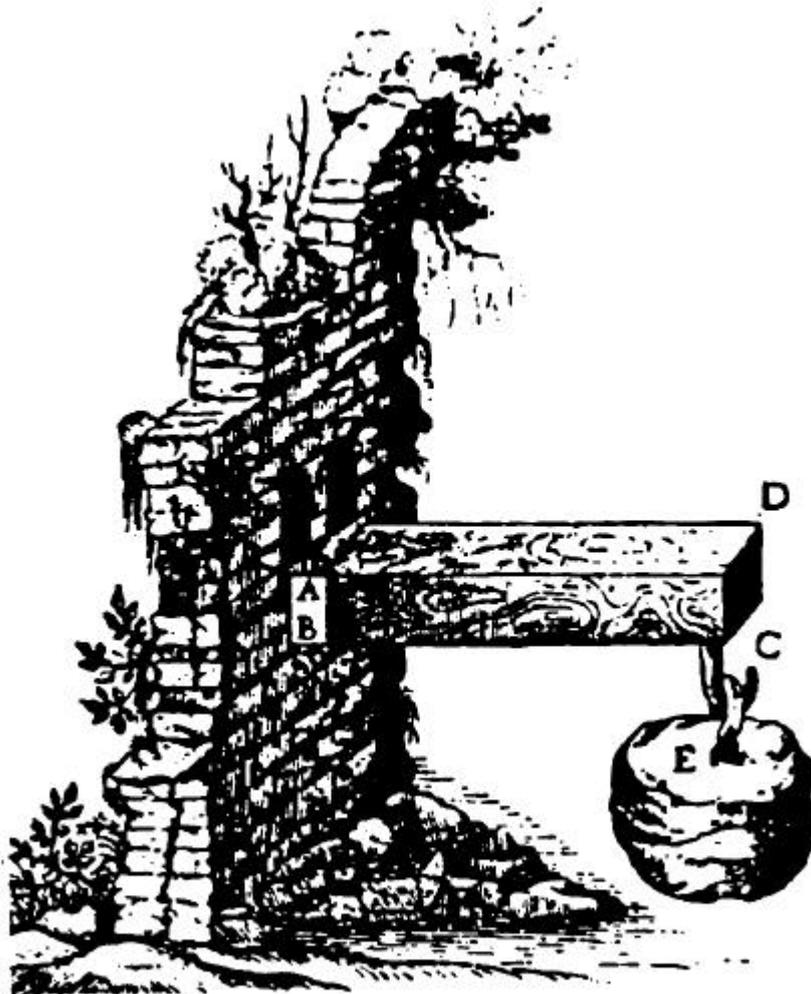


# RESISTANCE DES MATERIAUX

# RESISTANCE DES MATERIAUX



# TRACTION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

# RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni matematiche* » de Galilée)

# RESISTANCE DES MATERIAUX

## SOMMAIRE

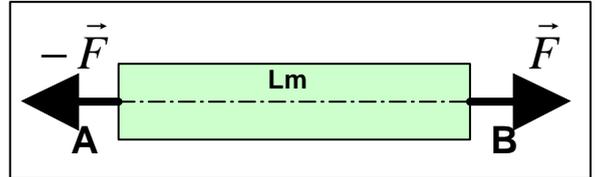
1.	DEFINITION.....	4
2.	EFFORT NORMAL N .....	5
3.	CONTRAINTE NORMALE $s$ .....	6
4.	CONDITION DE RESISTANCE.....	7
5.	DEFORMATIONS .....	7
5.1	ALLONGEMENTS.....	7
5.2	CONTRACTION LATERALE – COEFFICIENT DE POISSON $\nu$ .....	8
6.	RELATION CONTRAINTES - DEFORMATIONS .....	9
6.1	LOI DE HOOKE.....	9
6.2	EXEMPLES DE VALEURS DE MODULE D'YOUNG .....	9
6.3	ESSAI DE TRACTION.....	10
7.	CONCENTRATION DE CONTRAINTES .....	10
8.	CONTRAINTES DANS UNE SECTION INCLINEE.....	13



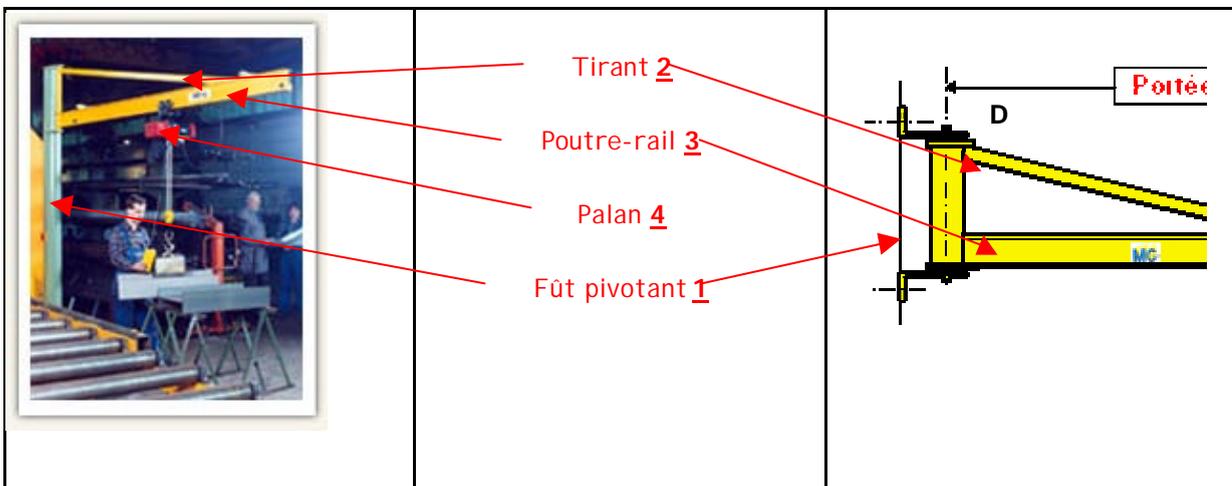
# RESISTANCE DES MATERIAUX

## 1. Définition

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions à ses extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées ( $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$ ), de direction la ligne moyenne (Lm).

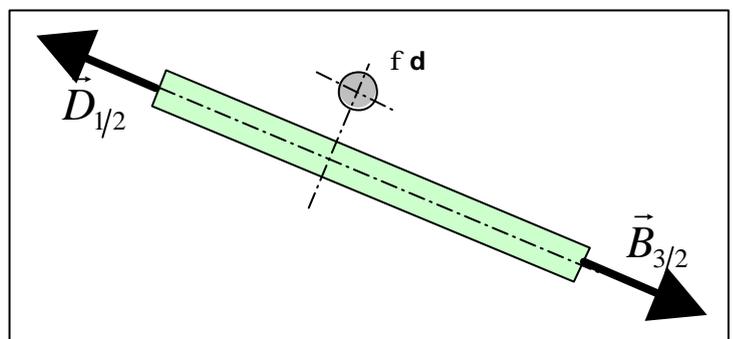


**Exemple :** les deux figures ci-dessous représentent une potence murale à flèche triangulée, utilisée en manutention pour lever et déplacer des charges.



Cette potence se compose d'un palan 4, d'une poutre rail 3, d'un fût pivotant 1 et d'un tirant 2. Le tirant 2 est soumis à une sollicitation de traction : il est soumis à l'action des deux forces  $\vec{B}_{3/2}$  et  $\vec{D}_{1/2}$ , égales et opposées, de direction BD, d'intensité maximale 6 200 N (intensité atteinte lorsque le palan est à l'extrême droite).

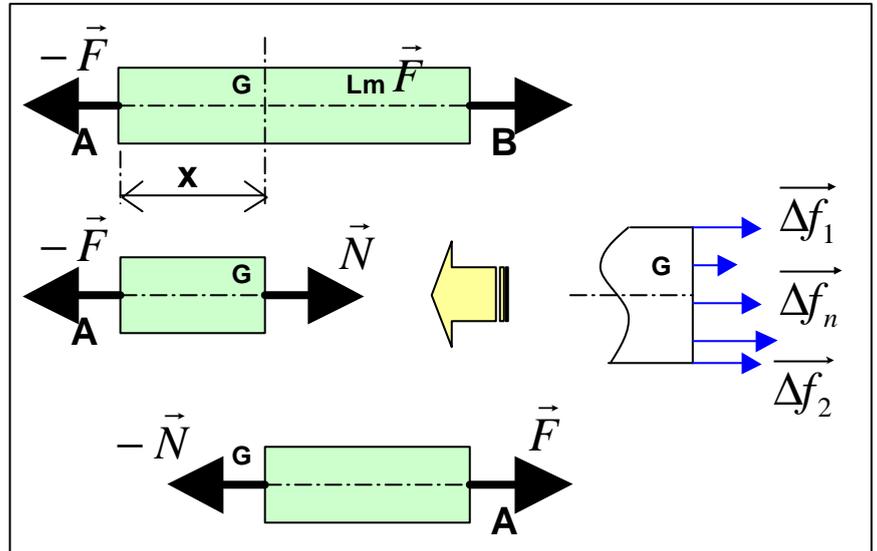
Le tirant 2 est cylindrique, de diamètre  $d$  inconnu, de longueur 2.8 m. Il est réalisé en acier (résistance à la rupture  $R_r = 500$  MPa, limite élastique  $R_e = 300$  MPa). Le diamètre  $d$  va être déterminé dans les paragraphes suivants.



# RESISTANCE DES MATERIAUX

## 2. Effort normal N

Faisons une coupure fictive dans la poutre précédente (section droite S, située à une distance  $x$  du point A) entre les deux extrémités A et B, de façon à faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre. Cette coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB.

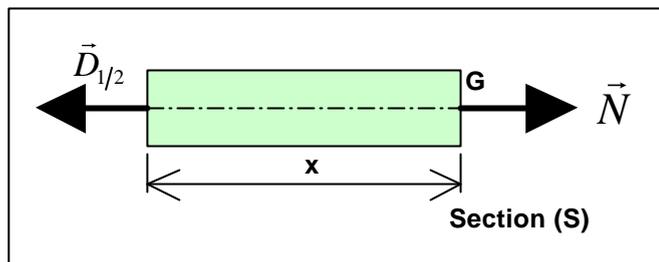


Si on isole le tronçon AG, la résultante des actions  $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \dots, \overrightarrow{\Delta f_n}$  qui s'exercent en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort normal  $\vec{N}$  en G (centre de gravité de la section S).

$$\vec{N} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \dots + \overrightarrow{\Delta f_n} = \vec{F} \quad (\text{direction AGB})$$

On a donc  $N = F \quad \forall x$

**Exemple :** reprenons le cas du tirant.



$$N = B_{3/2} = D_{1/2} = 6\,200 \text{ daN}$$

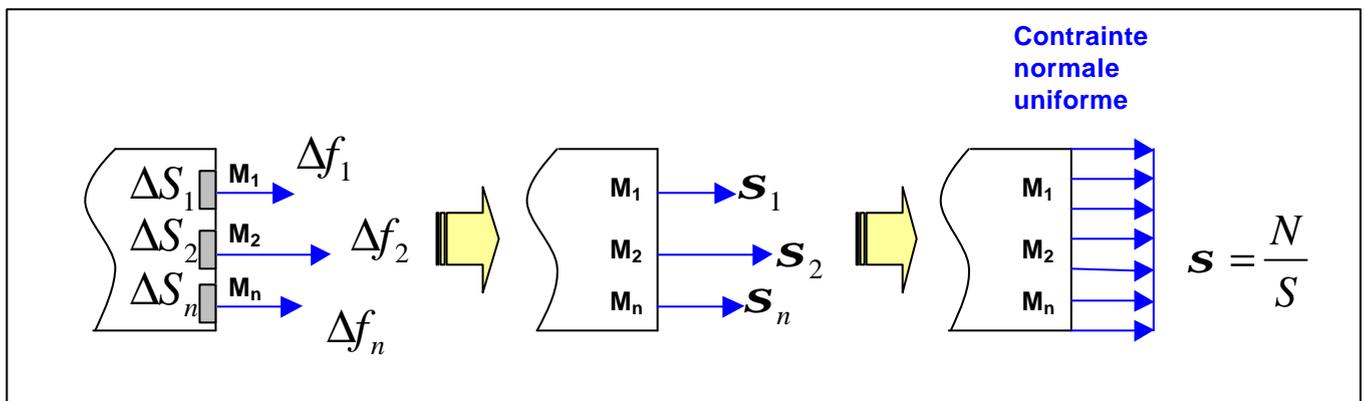
# RESISTANCE DES MATERIAUX

## 3. Contrainte normale $s$

Divisons la section  $S$  précédente en  $n$  petites surfaces élémentaires  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  telles que :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$$

Chaque élément de surface supporte un effort de traction  $\vec{\Delta f}_1, \vec{\Delta f}_2, \dots, \vec{\Delta f}_n$  parallèle à la ligne moyenne AB.



Si  $M_1, M_2, M_3, \dots$  sont les centres des petites surfaces  $\Delta S$ , en chaque point, la contrainte  $\sigma$  est définie comme la limite du rapport de  $\Delta f$  sur  $\Delta S$  lorsque  $\Delta S$  tend vers 0 :

$$s_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_1}{\Delta S_1} \right) ; \quad s_2 = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_2}{\Delta S_2} \right) ; \quad \dots ; \quad s_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f_n}{\Delta S_n} \right)$$

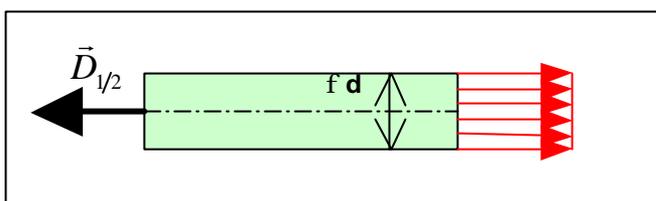
Contrainte normale uniforme : dans le cas général, et sauf cas particulier de concentrations de contraintes, on admettra que toutes les contraintes précédentes sont identiques.

On dit qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite  $S$ . Il en résulte que :

$$s = \frac{N}{S}$$

avec  $s$  la contrainte normale en MPa  
 $N$  l'effort normal en N  
 $S$  la section droite en  $\text{mm}^2$

**Exemple** : reprenons le cas du tirant, en supposant  $d = 20$  mm.



$$D_{1/2} = 6\,200 \text{ daN}$$

$$S = \frac{p \times 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

$$s = \frac{N}{S} = \frac{D_{1/2}}{S} = \frac{62\,000}{314} = 197 \text{ N.mm}^{-2}$$

# RESISTANCE DES MATERIAUX

## 4. Condition de résistance

Pour des conditions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte  $s$  précédemment déterminée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension  $R_{pe}$ .

La résistance pratique  $R_{pe}$  est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général,  $R_{pe}$  est définie à partir de la limite élastique  $R_e$  du matériau, déterminée par l'essai de traction.

$$s_{Maxi} = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

avec  $s$  le coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil.

**Exemple :** reprenons le cas du tirant. Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre  $d$  minimal pour la construction de celui-ci, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. Rappel : effort  $N = 62\,000$  N.

$$\text{❖ Détermination du diamètre } d : s_{Maxi} = \frac{N}{S} = \frac{62\,000}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq 100 \quad \text{d'où } d \geq 28.1 \text{ mm}$$

❖ Détermination du coefficient de sécurité : l'acier employé a pour caractéristiques  $R_e = 300$  MPa et  $R_r = 500$  MPa.

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} \quad \text{ou} \quad s = \frac{R_e}{R_{pe}} = \frac{300}{100} = 3$$

## 5. DEFORMATIONS

### 5.1 Allongements

$L_0$  : longueur initiale de la poutre

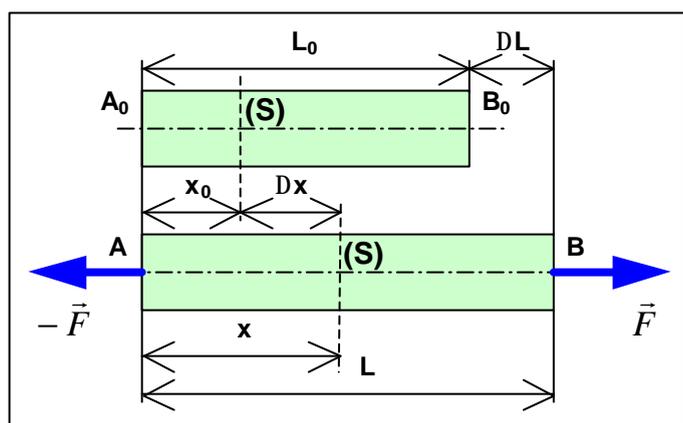
$L$  : longueur finale de la poutre

$\Delta L$  : allongement total de la poutre

$x_0$  : longueur initiale du tronçon

$x$  : longueur finale du tronçon

$\Delta x$  : allongement du tronçon

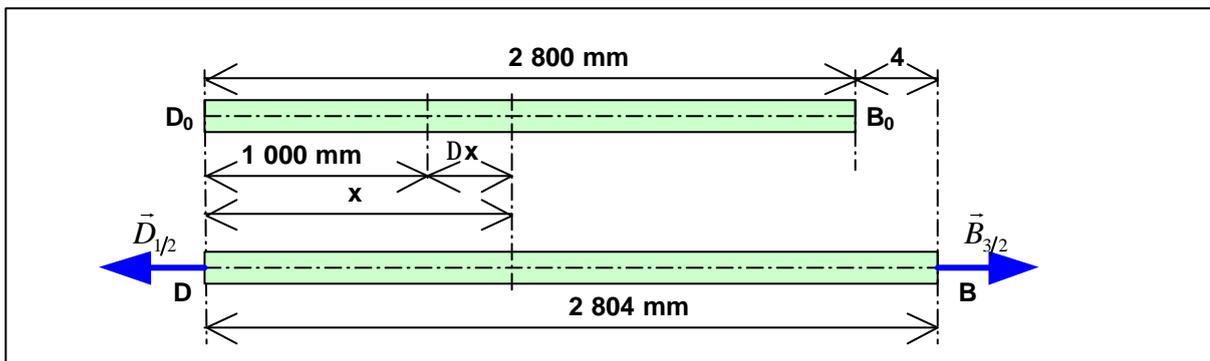


# RESISTANCE DES MATERIAUX

L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif (déformation  $\epsilon$ ) traduit cette propriété :

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

**Exemple :** reprenons le cas du tirant. Sous charge, le tirant s'allonge de 4 mm. Déterminons la déformation  $\epsilon$  et l'allongement d'un tronçon de longueur 1m.



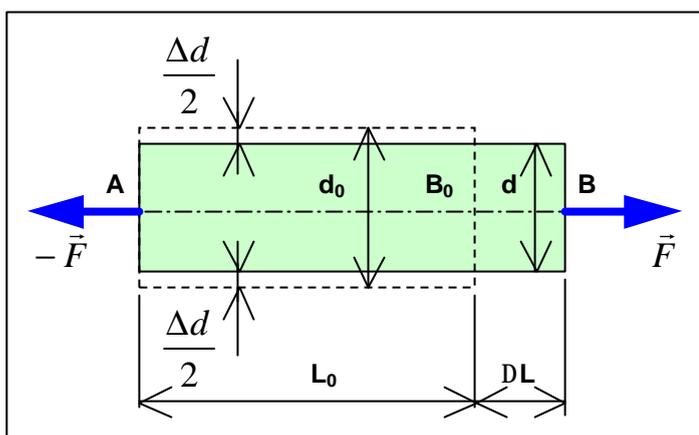
❖ Déformation  $\epsilon$  :  $e = \frac{4}{2800} = 0.00143$

❖ Allongement :  $e = \frac{\Delta x}{1000} = 0.00143$  d'où  $\Delta x = 0.00143 \times 1000 = 1.43 \text{ mm}$

On a donc  $x = 1001.43 \text{ mm}$

## 5.2 Contraction latérale – Coefficient de Poisson $\nu$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  caractérise le rapport entre la contraction latérale  $\epsilon_d$  et l'allongement relatif de la poutre  $\epsilon_L$  :



$$e_d = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{et} \quad e_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{alors } \mathbf{n} = -\frac{e_d}{e_L}$$

## 6. Relation Contraintes - Déformations

### 6.1 Loi de Hooke

Pour un grand nombre de matériaux, l'essai de traction montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort  $\vec{F}$  de traction est proportionnel à l'allongement  $\Delta L$ . Autrement dit, le rapport  $F/\Delta L$  est constant (analogie avec un ressort  $F = k x$ ).

Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke : en déformation élastique, la contrainte normale  $\sigma$  est proportionnelle à l'allongement relatif  $\epsilon$  :

$$\mathbf{s} = E \mathbf{e}$$

avec  $\sigma$  la contrainte normale (en MPa)

$\epsilon$  l'allongement relatif (sans unité)

$E$  le module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (en MPa)

Remarques : le module d'élasticité longitudinale  $E$  est une caractéristique (propriété mécanique intrinsèque) du matériau. La loi de Hooke est à la RDM ce que la loi d'Ohm est à l'électricité.

Exemple : reprenons le cas du tirant. ( $d = 28 \text{ mm}$ ,  $\sigma = 100 \text{ MPa}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $L = 2.8 \text{ m}$ ). Déterminons l'allongement du tirant :

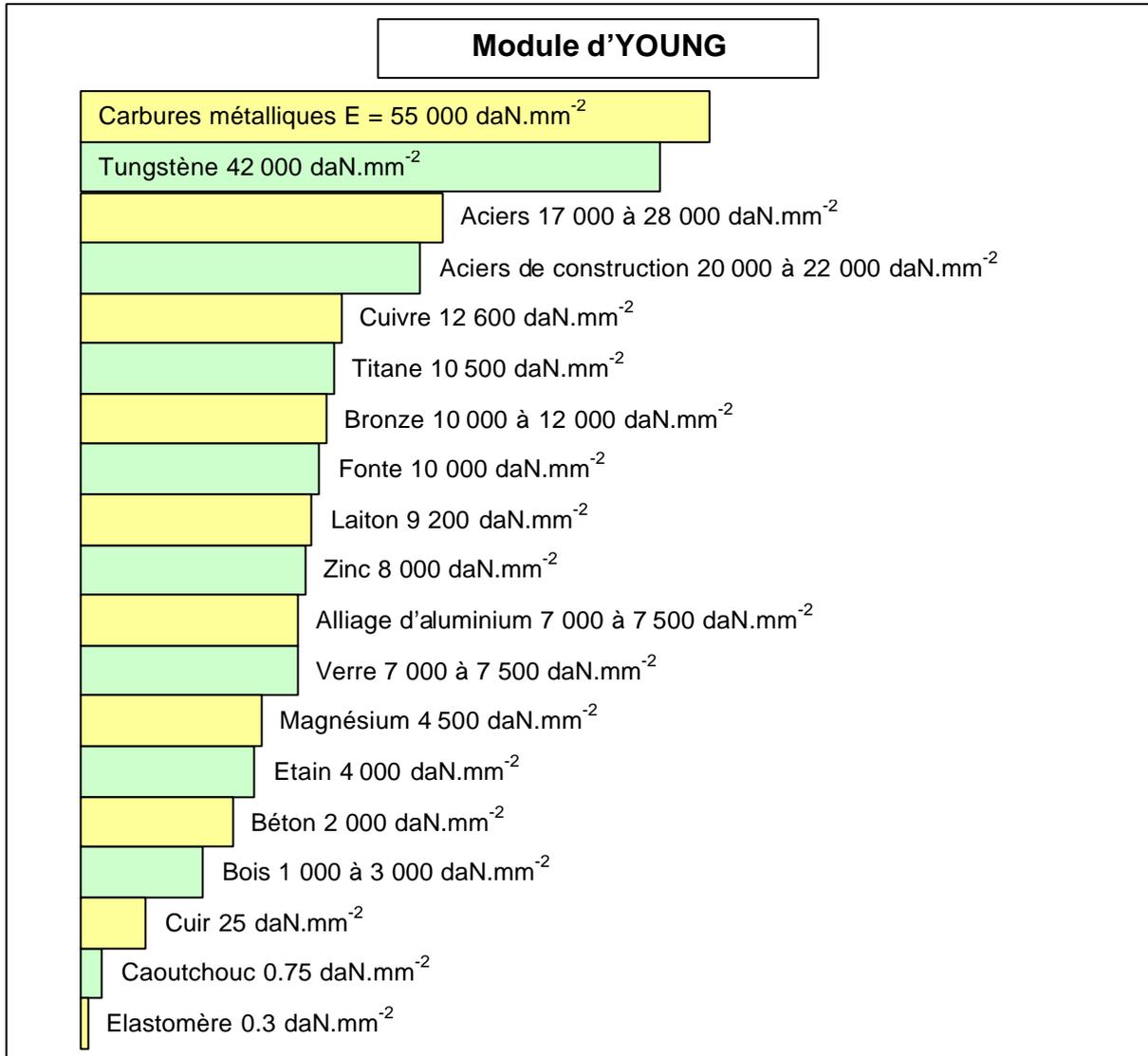
$$\mathbf{e} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\mathbf{s}}{E} = \frac{100}{200\,000} = 0.0005$$

$$\Delta L = \mathbf{e} \times L = 0.0005 \times 2\,800 = 1.4 \text{ mm}$$

### 6.2 Exemples de valeurs de module d'Young

Voir tableau page suivante.

# RESISTANCE DES MATERIAUX



## 6.3 Essai de traction

Voir le chapitre consacré aux essais mécaniques.

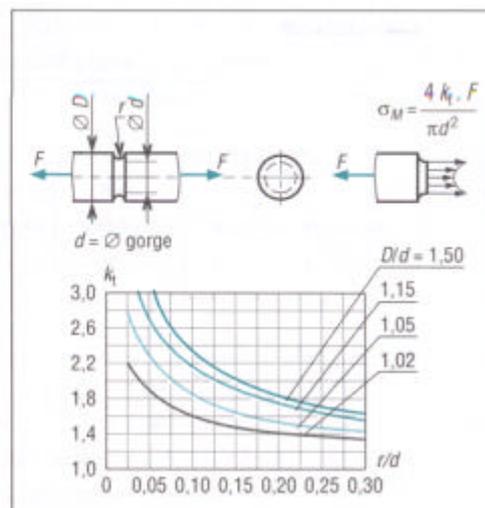
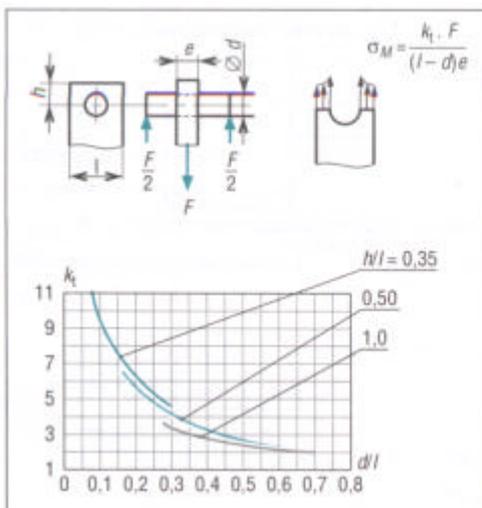
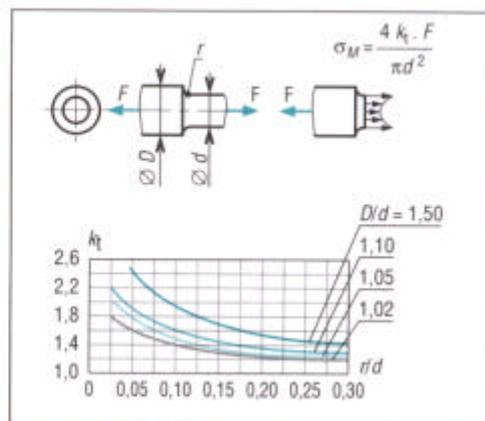
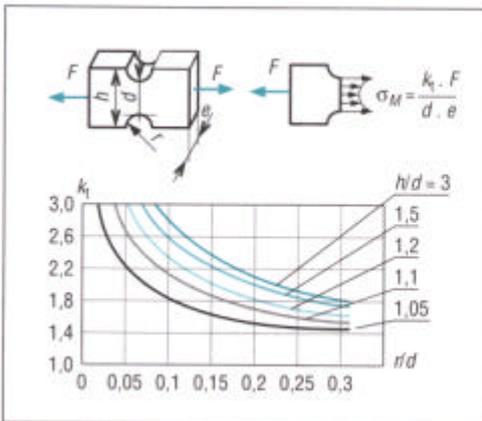
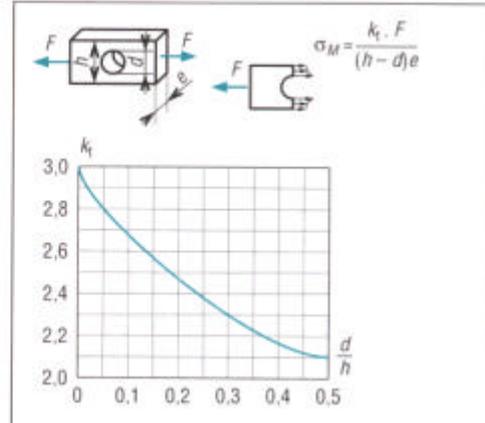
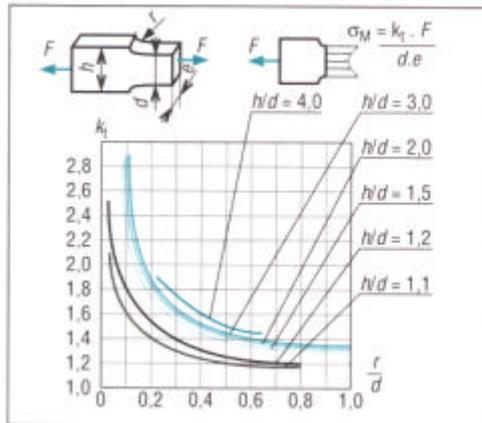
## 7. Concentration de contraintes

Lorsque les poutres étudiées présentent de brusques variations de sections (trous, gorges, épaulements...), la relation  $\sigma = N/S$  n'est plus applicable. En effet, au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme et présente des extremums. Le maximum est atteint pour les points situés à proximité des variations : on dit qu'il y a concentration de contraintes en ces points. La valeur de la contrainte est alors donnée par :

$$\sigma_{Maxi} = K_t \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{F}{S} = \frac{N}{S}$$

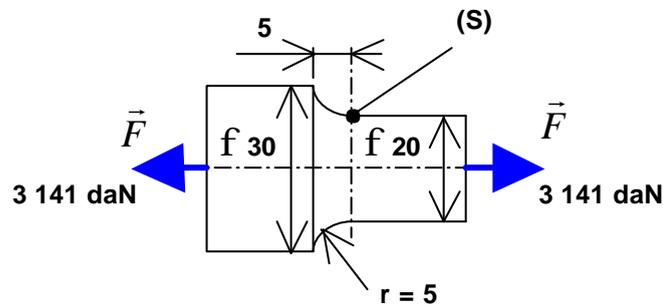
# RESISTANCE DES MATERIAUX

$K_t$  est appelé le coefficient de concentration de contraintes.  $K_t$  dépend de la forme de la section et du type de la variation (voir tableaux suivants).



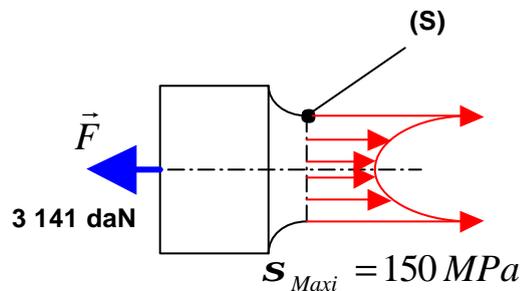
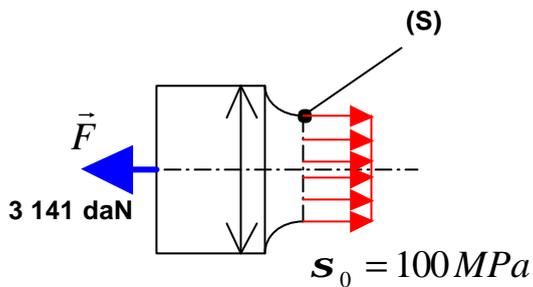
# RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : déterminons  $s_{Maxi}$  près de l'épaulement, au niveau de la section S, pour la pièce proposée :



Cas avec contraintes uniformes

Cas de concentration de contraintes



$$s_0 = \frac{F}{S} = \frac{31410}{\frac{\pi \times 20^2}{4}} = 100 \text{ N.mm}^{-2}$$

$$s_0 = \frac{F}{S} = \frac{31410}{\frac{\pi \times 20^2}{4}} = 100 \text{ N.mm}^{-2}$$

$$s_{Maxi} = K_t \cdot s_0$$

$$\frac{r}{d} = 0.25 \text{ et } \frac{D}{d} = 1.5$$

Le tableau donne alors  $K_t = 1.5$

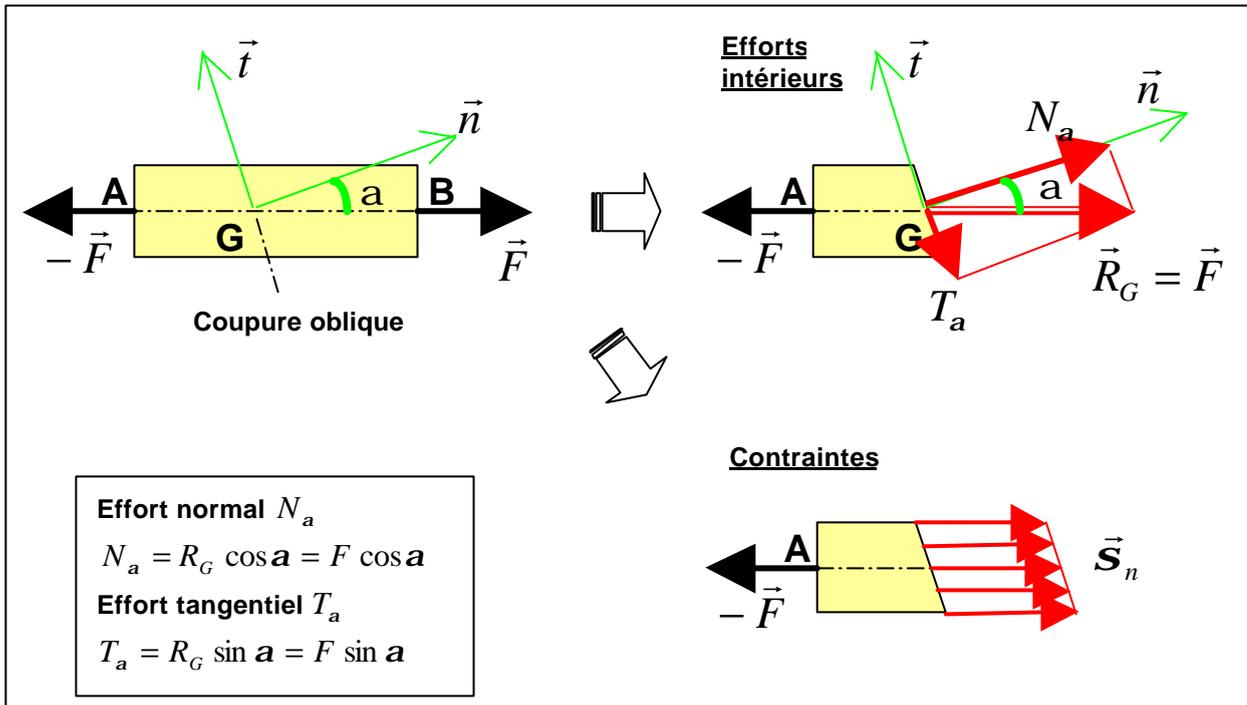
$$\text{d'où } s_{Maxi} = 1.5 \times 100 = 150 \text{ N.mm}^{-2}$$

Conclusion : la contrainte est maximale à la périphérie de (S), pour le diamètre de 20 et a pour valeur  $s_{Maxi} = 150 \text{ N.mm}^{-2}$

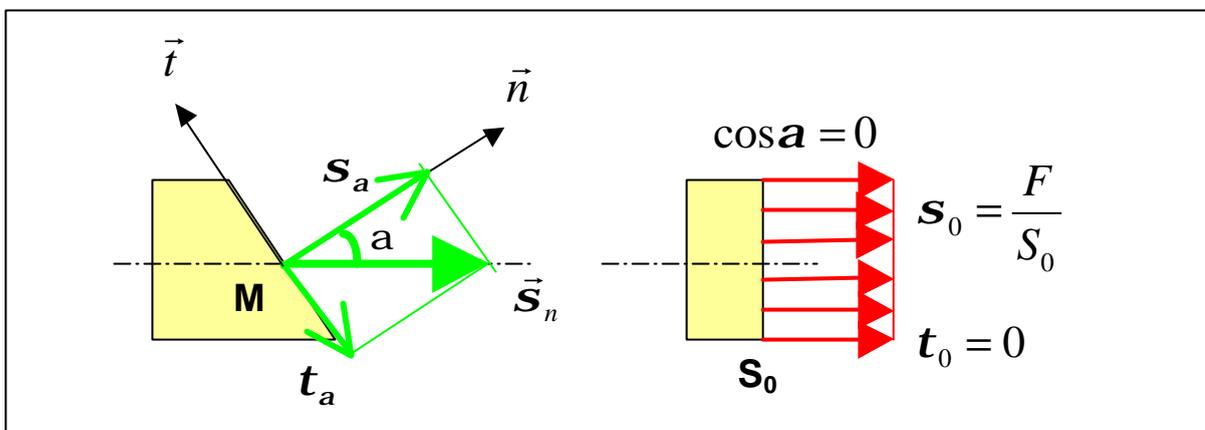
# RESISTANCE DES MATERIAUX

## 8. Contraintes dans une section inclinée

Déterminons les contraintes exercées dans une section inclinée d'un angle  $\alpha$  (section de normale  $\vec{n}$  et de vecteur tangent  $\vec{t}$ ).



L'équilibre statique du tronçon AG montre que les efforts intérieurs se réduisent à  $\vec{R}_G = \vec{F}$  au point G, barycentre de la section inclinée. La projection de  $\vec{R}_G$  sur  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  donne respectivement l'effort normal  $N_a$  et l'effort tranchant  $T_a$  dans la coupure.



Les contraintes  $\vec{s}_n$  dans la section sont identiques en tout point et parallèles à l'axe (ligne moyenne) de la poutre. La projection de  $\vec{s}_n$  sur  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  donne respectivement la contrainte normale à la coupure  $\vec{s}_a$  et la

# RESISTANCE DES MATERIAUX

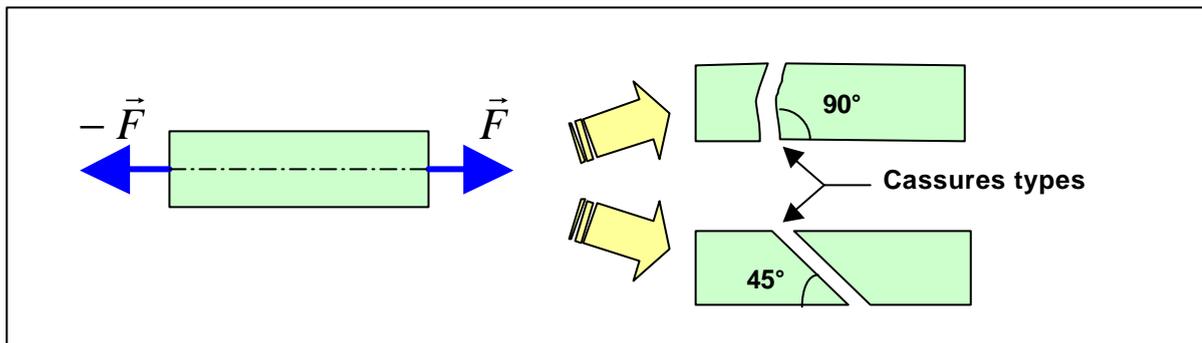
contrainte tangentielle  $t_a$ . En remarquant que  $S_0 = S \cos a$  (avec  $S_0$  l'aire de la section droite et  $S$  l'aire de la section inclinée) et que  $s_0 = F/S_0$  :

$$s_a = \frac{N_a}{S} = \frac{N_a}{S_0} \cos a = \frac{F}{S_0} \cos^2 a = s_0 \cos^2 a$$

$$t_a = \frac{T_a}{S} = \frac{F \sin a \cos a}{S_0} = s_0 \sin a \cos a$$

Remarque : la contrainte normale  $s_a$  est maximale pour  $\alpha = 0$  ( $s_{a \text{ Maxi}} = s_0$ ) et la contrainte tangentielle  $t_a$  est maximale pour  $\alpha = 45^\circ$  ( $t_{a \text{ Maxi}} = s_0/2$ )

Remarque : lorsque les matériaux ont une résistance au cisaillement plus faible, la rupture par traction ou compression se produit dans un plan incliné à  $45^\circ$ , plan où les contraintes de cisaillement  $t_a$  sont maximales. En revanche, si la résistance à la traction est proportionnellement plus faible, la rupture se produit dans une section droite ( $\alpha = 0$ ).



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

