A – On néglige les pertes

1° question :

Soit Q l'énergie nécessaire pour amener l'eau du ballon de $\theta_e = 10\,°C$ à $\theta_f = 60\,°C$.

$Q = V\,\rho_{eau}\,c_{eau}\,(\theta_f - \theta_e)$

A.N. : $Q = 4{,}18.10^7$ J

2° question : La puissance P de chauffage est telle que : $P = \dfrac{Q}{t_0}$; on a donc : $t_0 = \dfrac{Q}{P}$

> *Attention !* Q est en joules (J) et P en watts (W) : la durée est en secondes (s) …… il faut l'exprimer avec une unité mieux adaptée.
>
> Le résultat de l'opération donne $t_0 = 2{,}09.10^4$ s soit 5,81 h……
>
> Pour convertir les heures en h et en minutes, on écrit que 0,81 h se note aussi $\dfrac{81}{100} \times 1\text{h}$ soit $\dfrac{81}{100} \times 60\,\text{min}$!
>
> A.N. : $t_0 = 5\,\text{h}\;48\,\text{min}$

B – On tient compte des pertes liées à la réalisation technologique du ballon

1° question : La puissance perdue p est proportionnelle à l'écart de température. On écrit :

$p = a\,(\theta - \theta_e)$ (a est une constante)

A.N. : $a = 1\,\text{W.°C}^{-1}$

> a est le coefficient directeur de la droite ! Attention ! en physique, le coefficient directeur représente souvent une grandeur qu'il faut donc exprimer avec son unité !

2° question : a) La chaleur dq nécessaire pour élever une masse m d'eau de $d\theta$ s'écrit :

A.N. : $dq = m\,c_{eau}\,d\theta$

b) La chaleur perdue pendant la durée dt s'écrit :

$dq' = p\,dt = a\,(\theta - \theta_e)\,dt$

c) Le chauffage fournit, pendant l'intervalle de temps dt, l'énergie $P\,dt$. Cette énergie sert, en partie, à élever la température de l'eau de $d\theta$; une autre partie est perdue.

Le bilan énergétique du système {eau + ballon} se note, alors :

$P\,dt = m\,c\,d\theta + a\,(\theta - \theta_e)\,dt$

3° question : La relation précédente se note aussi :

$[P - a\,(\theta - \theta_e)]\,dt = m\,c\,d\theta$ soit :

$$dt = \frac{m\,c}{P - a\,(\theta - \theta_e)}\,d\theta$$

La durée $\Delta t = t' - t_0$ représente l'intégrale $\displaystyle\int_{t=t_0}^{t=t'} dt$; on a donc :

$$\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} \frac{m\,c}{P - a\,(\theta - \theta_e)}\,d\theta$$

D'autre part, on peut écrire : $d[P - a\,(\theta - \theta_e)] = -\,a\,d\theta$ soit : $-\dfrac{1}{a}\,d[P - a\,(\theta - \theta_e)] = d\theta$

$$\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f} -\frac{1}{a}\frac{m\,c\,d[P - a(\theta-\theta_e)]}{P - a(\theta-\theta_e)} = -\frac{m\,c}{a}\int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f}\frac{d[P - a(\theta-\theta_e)]}{P - a(\theta-\theta_e)}$$

Comme la grandeur $[P - a(\theta - \theta_e)]$ est positive, l'intégrale se calcule aisément :

$$\Delta t = -\frac{m\,c}{a}\int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f}\frac{d[P - a(\theta-\theta_e)]}{P - a(\theta-\theta_e)} = -\frac{m\,c}{a}\ln\frac{P - a(\theta_f-\theta_e)}{P}$$

On obtient, enfin : $\Delta t = \frac{m\,c}{a}\ln\frac{P}{P - a(\theta_f - \theta_e)}$ A.N. : $\Delta t = 2{,}12.10^4$ s soit 5h 53min

Remarque : Le calcul de l'intégrale peut être effectué en utilisant le calcul du texte !

Il faut rapprocher l'expression : $\Delta t = \int_{\theta=\theta_e}^{\theta=\theta_f}\frac{m\,c}{P - a(\theta-\theta_e)}\,d\theta$

de l'intégrale $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{K}{A - B\theta}\,d\theta$

On identifie A à $(P + a\,\theta_e)$, B au terme a et K au produit m c.

4° question : On constate que l'isolation du réservoir est de très bonne qualité ; la puissance perdue est faible et, par conséquent, la durée Δt n'est guère éloignée de la valeur calculée au A - 2°(pertes négligées).