

Corrigé

Dans les questions 1 à 4, le système est le gaz parfait qui décrit le cycle ($n = 0,1 \text{ mol}$).

1° question :

- État 1 : l'équation d'état des gaz parfaits nous permet de trouver le volume V_1 :

$$V_1 = n \frac{R T_1}{p_1}$$

$$\text{A.N.: } V_1 = 2,43 \text{ L}$$

- Transformation 1 \rightarrow 2

La transformation est **isotherme** de sorte que le produit pV reste constant.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad ; \text{ on en déduit : } V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}$$

$$\text{A.N.: } V_2 = 0,49 \text{ L}$$

- Transformation 2 \rightarrow 3

La transformation de ce gaz parfait est adiabatique et réversible ; on a, alors :

$$p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = p_3^{1-\gamma} T_3^\gamma$$

$$\text{soit : } \frac{p_3^{1-\gamma}}{p_2^{1-\gamma}} = \frac{T_2^\gamma}{T_3^\gamma} \quad \text{puis} \quad \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^\gamma$$

$$\text{et, enfin : } \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{(1-\gamma) \times \frac{1}{(1-\gamma)}} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\gamma \times \frac{1}{(1-\gamma)}}$$

$$\text{On en déduit : } \left(\frac{p_3}{p_2} \right) = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{(1-\gamma)}} \quad \text{puis} \quad p_3 = p_2 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\text{A.N.: } p_3 = 3,46 \text{ bar}$$

- L'équation d'état du gaz parfait nous permet de calculer le volume :

$$V_3 = n \frac{R T_3}{p_3}$$

$$\text{A.N.: } V_3 = 0,64 \text{ L}$$

- Transformation 4 \rightarrow 1

La transformation 4 \rightarrow 1 est adiabatique et réversible ; on a, alors : $p_4^{1-\gamma} T_4^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma$

$$p_4 = p_1 \left(\frac{T_1}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\text{A.N.: } p_4 = 0,69 \text{ bar}$$

Le volume est, alors, facile à calculer :

$$V_4 = n \frac{R T_4}{p_4}$$

$$\text{A.N.: } V_4 = 3,22 \text{ L}$$

2° question :

- Transformation 1 → 2 : la transformation est isotherme ($\Delta T = 0$).

On applique le Premier Principe : $W_{12} + Q_{12} = \Delta U_{12}$.

Pour un gaz parfait, on a : $\Delta U_{12} = n C_v \Delta T$ (Première Loi de Joule).

On en déduit : $W_{12} + Q_{12} = 0$ soit : $W_{12} = -Q_{12}$

* Calcul de W_{12} : On écrit, successivement : $W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n R T}{V} \, dV = n R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$

On obtient, alors : $W_{12} = n R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$\text{A.N. : } W_{12} = 392 \text{ J}$$

$$\text{A.N. : } Q_{12} = -392 \text{ J}$$

- Transformation 3 → 4 : la transformation est également isotherme ; le raisonnement précédent reste valable pour cette transformation.

$W_{34} = n R T_3 \ln \frac{V_4}{V_3}$

$$\text{A.N. : } W_{34} = -359 \text{ J}$$

$$\text{A.N. : } Q_{34} = 359 \text{ J}$$

- Transformation 2 → 3 : la transformation est adiabatique ; le gaz parfait ne reçoit aucune chaleur de l'extérieur : $Q_{23} = 0$

L'application du Premier Principe nous permet d'écrire : $Q_{23} + W_{23} = W_{23} = \Delta U_{23}$

Le gaz est parfait : $\Delta U_{23} = n C_v (T_3 - T_2)$ (Première Loi de Joule)

On a, alors : $W_{23} = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_3 - T_2)$ en remplaçant C_v par $\frac{R}{\gamma - 1}$ (voir annexe)

$$\text{A.N. : } W_{23} = -65 \text{ J}$$

- Transformation 4 → 1 : la transformation est adiabatique ; on a : $Q_{41} = 0$

Le raisonnement développé précédemment reste vrai pour cette transformation :

$W_{41} = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_4)$

$$\text{A.N. : } W_{41} = 65 \text{ J}$$

Remarque : Comme $T_1 = T_2$ et $T_3 = T_4$, les travaux W_{23} et W_{41} sont opposés.

3° question :

* $Q_{34} > 0$: le gaz qui décrit le cycle **REÇOIT** effectivement de la chaleur ; cet échange thermique **doit** avoir lieu avec la **source froide** pour que le cycle décrit corresponde bien à un cycle **réfrigérant**.

* $Q_{12} < 0$: le gaz qui décrit le cycle **FOURNIT** de la chaleur à l'extérieur ; cet échange thermique **doit** avoir lieu avec la **source chaude** pour que le cycle décrit corresponde bien à un cycle réfrigérant.

4° question : Soit W le travail total reçu par le gaz qui décrit un cycle.

$$W + Q_{12} + Q_{34} = (\Delta U)_{\text{cycle}} = 0 \quad (U \text{ est une fonction d'état}) \text{ soit : } W = -(Q_{12} + Q_{34})$$

On en déduit la valeur de W : $W = 33 \text{ J}$

On constate immédiatement que le gaz doit recevoir du travail de la part de l'extérieur puisque $W > 0$; W représente bien le travail apporté par l'extérieur au gaz.

Remarque : on peut aussi calculer W en faisant la somme des travaux $W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$!

5° question :

Pour **l'utilisateur** de ce dispositif (destiné à refroidir un local) la « recette » est constituée par $Q_{34} > 0$ (chaleur « retirée » au local à refroidir) et la dépense est naturellement le travail W que nous venons de calculer !

L'efficacité frigorifique (appelé aussi **Coefficient de Performance « froid »**) s'écrit :

$$e_F = \frac{Q_{34}}{W} \quad \text{A.N.: } e_F = 10,8$$

Remarque : Le cycle de Carnot est un cycle « idéal » ; dans la pratique, les coefficients de performances sont moindres.

6° question : soit Q la chaleur « reçue » par la masse d'eau ($m = 1 \text{ kg}$) qui se transforme en glace.

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

* q_1 : chaleur « reçue » par la masse d'eau ($m = 1 \text{ kg}$) lorsque sa température passe de $\theta_1 = 10^\circ\text{C}$ à $\theta_s = 0^\circ\text{C}$: $q_1 = m c_e (\theta_s - \theta_1)$

* q_2 : chaleur « reçue » par la masse d'eau ($m = 1 \text{ kg}$) au cours de la solidification : $q_2 = m (-L_f)$

* q_3 : chaleur « reçue » par la masse d'eau ($m = 1 \text{ kg}$) lorsque sa température passe de $\theta_s = 0^\circ\text{C}$ à $\theta_2 = -5^\circ\text{C}$: $q_3 = m c_g (\theta_2 - \theta_s)$

Comme $\theta_s = 0^\circ\text{C}$, une **application numérique partielle** fournit : $Q = m [c_g \theta_2 - L_f - c_e \theta_1]$

A.N. : $Q = -388 \text{ kJ}$ l'eau perd donc de la chaleur ; elle perd 388 kJ.

Annexe :

$$C_p - C_v = R$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\gamma C_v - C_v = R$$

$$\text{donc : } C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$