Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
de l'Enseignement Supérieur
de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

BTS BAT

Brevet de Technicien Supérieur
Bâtiment

Examen de Fin de formation
Session mai 2010

Le sujet comporte :

Mathématiques

Durée : 3 heures
Coefficient : 15

Exercice 1 (7,5 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *et* $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1 1. a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est : $P(\lambda)=(3-\lambda)(\lambda^2-1)$

0.5 b) En déduire les valeurs propres de A.

1,5 2. On pose $U=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $V=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Montrer que U, V et W sont les vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres -1, 3 et 1.

3. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1 a) Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1}=Q$

0.5 b) Vérifier que $P^{-1}AP=D$

4. On considère le système différentiel :

$$(S)\qquad \begin{cases} x'(t)=x(t)-2y(t)+2z(t)\\ y'(t)=-x(t)+z(t)\\ z'(t)=x(t)-y(t)+2z(t)\end{cases}$$

Où $x(t), y(t)$ *et* $z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $x(0)=y(0)=z(0)=1$

0,5 a) Vérifier que : $X'(t)=A\cdot X(t)$ où $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$

1 b) On pose $X(t)=P.X_1(t)$ où $X_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\\z_1(t)\end{pmatrix}$ avec $x_1(t), y_1(t)$ *et* $z_1(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Montrer que : $X'(t)=P.X_1'(t)$ et $X_1'(t)=D.X_1(t)$

0,5 3) a) Résoudre le système différentiel : $X_1'(t)=D.X_1(t)$

1 b) En déduire la solution du système (S).

Exercice 2 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur IR^2 par : $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 5y$

0.5 1) a) calculer $f\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{4}\right)$

0.5 b) Calculer les dérivées partielles premières de f

1 c) En déduire que le seul point critique de f est $A\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{4}\right)$

0.5 3) a) Calculer les dérivées partielles secondes de f

1 b) Montrer que f présente un minimum local en A.

1.5 4) a) Montrer que : $\forall (x, y) \in IR^2 : f(x, y) + \frac{33}{8} = 4\left(x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2$

1.5 b) En déduire que f présente un minimum global en A.

Exercice 3 (4 points)

Soit $\omega(x, y) = (2xy - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy$

0.5 1) Montrer que ω est une forme différentielle exacte.

1.5 2) a)Déterminer les formes différentielles f sur $\mathbb{R}^2$ tel que : $df = \omega$

0.5 b) En déduire la forme différentielle g vérifiant $dg = \omega$ et $g(0,0) = 2$

1.5 3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{(\Gamma)} \omega$ où (Γ) est la courbe définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0,1]$$

Exercice 4(2 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux points $A(1, 0)$ et $B(3, 1)$

0.5 1) Donner un paramétrage du segment $\Delta = [AB]$

1.5 2) Calculer l'intégral curviligne $\int_{\Delta} xy^2 dx - x^2 y dy$