CENTRE D'EXAMEN
LYCEE AL KHAOUARIZMY
CASABLANCA

EXAMEN DE PASSAGE
SESSION MAI 2009
SECTION : BTS - mouliste -

EPREUVE : Mathematiques
DUREE : 2 heures

Exercice 1 : (3 points)

on considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1 pt 1) Montrer que A est inversible.

1 pt 2) En utilisant la méthode de Gauss, calculer A^{-1}.

1 pt 3) En déduire la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : (4 points)

on considère dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$

1 pt 1) Trouver toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

2) on considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{2X^2 + X + 1}{X^3 + X^2 + X + 1}$$

1 pt. a) Trouver les valeurs de a, b et c telles que :

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

1 pt. b) En deduire la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

3) En utilisant 2) b) calculer l'integral :

1 pt. $$\int_0^1 F(x)\,dx .$$

Exercice 3 : (3 points)

1 pt. 1) Ecrire le developpement limité de la fonction $x \mapsto e^x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2 pts. 2) En déduire : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3 + 2x^5}$.

Exercice 4 :

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$: $f(P) = P'' - P' + P$ où P' : polynome derivée de P

P'' : polynôme derivée seconde de P

1 pt. 1) Montrer que f est linéaire.

2)

1 pt. a) calculer $f(1)$; $f(X)$, $f(X^2)$.

1 pt. b) Determiner la matrice A de f relativement à la base $B_c = (1, X, X^2)$.

2 pts c) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

1 pt. d) En deduire l'expression du polynôme L de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $L'' - L' + L = X - 1$.

3) on considère dans $\mathbb{R}_2[X]$ les polynômes :

$T = X^2 - 1$ $\quad$ $S = X + 1$ $\quad$ $Q = 2 - X$.

1 pt. a) Montrer que la famille $B = (T, S, Q)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1 pt. b) Determiner la matrice de passage P de la base B_c à la base B.

2 pts c) calculer P^{-1} puis determiner la matrice M telle que : $M = P^{-1}.A.P$

1 pt. d) Verifier que M est la matrice de f relativement à la base B.