ROYAUME DU MAROC
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DE LA FORMATION DES CADRES
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Centre National de l'Evaluation et des Examens

Examen National du Brevet de Technicien Supérieur
Session de mai 2009

Filière:	BATIMENT	Durée:	3 H
Épreuve de:	MATHEMATIQUE	Coefficient:	15

Exercice 1 (7 points)

On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x,y) = xy(2 - x - y)$$

0.5 1) a) Calculer $f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ et $f(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$.

0.5 b) Justifier que f est de classe C^2 sur D.

0.5 2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

0.5 b) Montrer que $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ est un point critique de f.

0.5 3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

1 b) Montrer que f admet un maximum local en $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ et donner sa valeur.

4) a) Montrer que pour tout couple (x,y) de D :

1

$$\frac{1}{4}(y-\frac{2}{3})^2(y-\frac{8}{3}) - y(x+\frac{1}{2}y-1)^2 = f((x,y)) - \frac{8}{27}$$

0.5 b) En déduire que $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ est un maximum global de f sur D.

5) Soit (Δ) le domaine plan défini par $\Delta = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ 0 \le x \le y \le 1\}$

0.5 a) Représentez le domaine (Δ) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.5 b) Montrer que $\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{12}$

Exercice 2 (5 points)

Soit $f(x)$ le polynôme définie sur IR par : $f(x)=-x^3+6x^2-11x+6$
et soient dans $M_3\ (IR)$ les deux matrices A et P avec :

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & -10 & 5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

1 1) Calculer $f(1)$ puis résoudre dans IR l'équation $f(x)=0$

1.5 2) Montrer que $f(x)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A.

1.5 3) Calculer $\det(P)$ et déduire P^{-1}

1 4) Calculer la matrice $D=P^{-1}AP$

Exercice 3 (4 points)

1 1) En faisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^4 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt = 5\ \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

1 2) Vérifier que :

$$\int_1^2 x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^4 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

2 3) En déduire la valeur de l'intégrale double :

$$I=\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy \quad \text{où } A=[1,2]\times[0,1]$$

Exercice 4 (4points)

2 1) Déterminer toutes les fonctions différentiables sur IR^2 telles que :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-y\end{cases}$$

2) Soit ω la forme différentielle définie sur IR^2 par : $\omega(x,y)=(2x+y)\,dx+(x-y)\,dy$

1 a) Montrer que ω est exacte.

1 b) En déduire toutes les fonctions différentiables f telles que $df=\omega$.